الفصل (١)
تحليل الدوال

١-١	١-٢
١-٣	١-٤
١-٥	١-٦
١-٧	

عودة لفهرس تدرب

الدوال

١ـ١

تدرب وحل المسائل

الحل

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 2 ,1)

1) $x > 50$

$(50,\infty)$ ، $\{x \mid x > 50, x \in R\}$

2) $x < -13$

$(-\infty, -13)$ ، $\{x \mid x < -13, x \in R\}$

3) $x \leq -4$

$(-\infty, -4]$ ، $\{x \mid x \leq -4, x \in R\}$

4) $\{-4, -3, -2, -1, \ldots\}$

$\{x \mid -4 \leq x, x \in Z\}$

عودة لفهرس الفصل (١)

الحل

5. $-31 < x \le 64$

$(-31, 64]$ ، $\{x \mid -31 < x \le 64, x \in R\}$

6. $x > 21$ أو $x < -19$

$(-\infty, -19) \cup (21, \infty)$ ، $\{x \mid x < -19$ أو $x > 21, x \in R\}$

7. $x \ge 67$ أو $x \le 61$

$(-\infty, 61] \cup [67, \infty)$ ، $\{x \mid x \le 61$ أو $x \ge 67, x \in R\}$

8. $x > 86$ أو $x \le -45$

$(-\infty, -45) \cup [86, \infty)$ ، $\{x \mid x \le -45$ أو $x > 86, x \in R\}$

9. المضاعفات الموجبة للعدد 5

$\{x \mid x = 5n, n \in N\}$

10. $x \ge 32$

$[32, \infty)$ ، $\{x \mid x \ge 32, x \in R\}$

الحل

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالةً في x أم لا: (مثال 3)

11 المتغير المستقل x يمثّل رقم الحساب في البنك، والمتغير y يمثّل الرصيد في الحساب.

دالة

12

x	0.01	0.04	0.04	0.07	0.08	0.09
y	423	449	451	466	478	482

ليست دالة

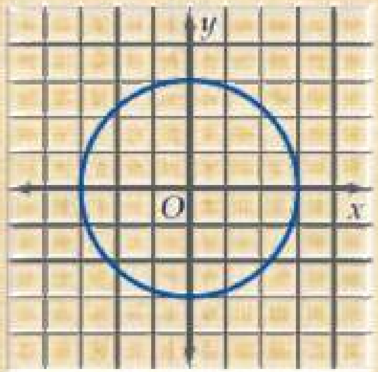
13 $\frac{1}{x} = y$ دالة

14 $x^2 = y + 2$ دالة

15 $\sqrt{48y} = x$ دالة

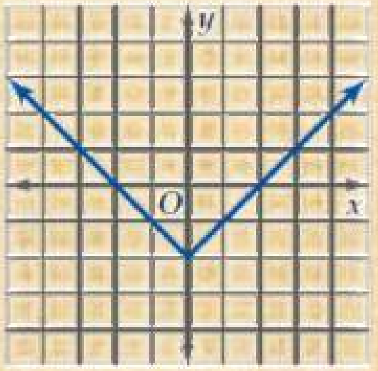
16 $\frac{x}{y} = y - 6$ ليست دالة

17



ليست دالة

18



دالة

الحل

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية: (مثال 4)

19 $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$

a) $g(9)$ 310

b) $g(3x)$ $18x^2 + 54x - 14$

c) $g(1 + 5m)$ $50m^2 + 110m + 6$

20 $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$

a) $h(4)$ -207

b) $h(-2y)$ $24y^3 + 12y + 9$

c) $h(5b + 3)$ $-375b^3 - 675b^2 - 435b - 90$

21 $f(t) = \frac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$

a) $f(-6)$ $\frac{-13}{79}$

b) $f(4t)$ $\frac{16t+11}{48t^2+20t+1}$

c) $f(3 - 2a)$ $\frac{-8a+23}{12a^2-46a+43}$

22 $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4}$

a) $g(-2)$ 12

b) $g(5x)$ $\frac{375x^3}{25x^2+5x-4}$

c) $g(8 - 4b)$ $\frac{-192b^3+1152b^2-2304b+1536}{16b^2-68b+68}$

الحل

23 $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$

a) $g(-2)$ 3

b) $g(3m)$ $3 + \sqrt{9m^2 - 4}$

c) $g(4m - 2)$ $3 + 4\sqrt{m^2 - m}$

24 $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$

a) $t(-4)$ $20\sqrt{6}$

b) $t(2x)$ $10\,|x|\,\sqrt{6}$

c) $t(7 + n)$ $5|7 + n|\,\sqrt{6}$

الحل

25 مبيعات: إذا مثّلت مبيعات شركة للسيارات خلال خمس سنوات بالدالة: $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$، حيث t الزمن بالسنوات، وكانت المبيعات الفعلية موضحة في الجدول المجاور. (مثال 4)

السنة	المبيعات بملايين الريالات
1	1
2	3
3	14
4	74
5	219

a أوجد $f(1)$. 9 ملايين

b أوجد $f(5)$. 213 مليوناً

c هل تعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنوات الأولى، أم في السنوات الأخيرة؟ برّر إجابتك.

أعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنوات الأخيرة والتى حققت أعلى مبعات.

الحل

حدِّد مجال كل دالة مما يأتي: (مثال 5)

26 $f(x) = \frac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$

$(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, \infty)$

27 $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$

$(-\infty, -5) \cup (-5, 8) \cup (8, \infty)$

28 $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$

$(-\infty, \infty)$

29 $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$

$[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

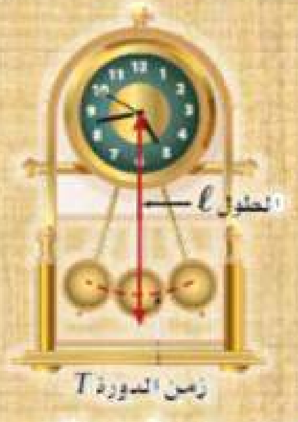
30 $f(a) = \frac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$

$(0.25, \infty)$

31 $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 1}$

$(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$

32 **فيزياء:** ويعطى الزمن الدوري T لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ طول البندول، فهل تمثّل T دالة في ℓ؟ إذا كانت كذلك فحدِّد مجالها، وإذا لم تكن دالة فبيِّن السبب. (مثال 5)



نعم ، لأن الطول لا يكون سالباً . ومجال الدالة هو : $[0, \infty)$

الحل

أوجد $f(-5)$ وَ $f(12)$ لكل من الدالتين الآتيتين: (مثال 6)

33

$$f(x)=\begin{cases}-4x+3 & , \quad x<3\\ -x^3 & , \quad 3\le x\le 8\\ 3x^2+1 & , \quad x>8\end{cases}$$

23 ; 433

34

$$f(x)=\begin{cases}-15 , & x<-5\\ \sqrt{x+6} & , \quad -5\le x\le 10\\ \frac{2}{x}+8 & , \quad x>10\end{cases}$$

1 ; $8\frac{1}{6}$

35

عمل: تمثل الدالة $T(x)$ أدناه المبلغ (بالريال) الذي تتقاضاه شركة توزيع لأجهزة هاتف محمول:

$$T(x)=\begin{cases}2.1x & , \quad 0\le x\le 7000\\ 5000+2.4x & , \quad 7000<x\le 20000\\ 8000+3x & , \quad 20000<x\le 80000\end{cases}$$

حيث x تمثّل عدد الأجهزة الموزّعة، فأوجد:

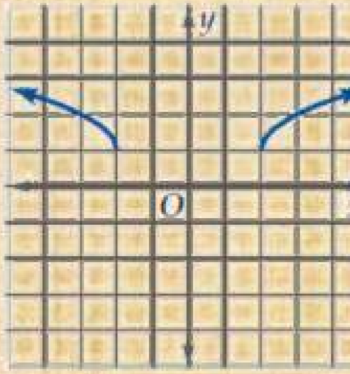
. $T(7000)$, $T(10000)$, $T(50000)$

14700 , 24500 , 150800

الحل

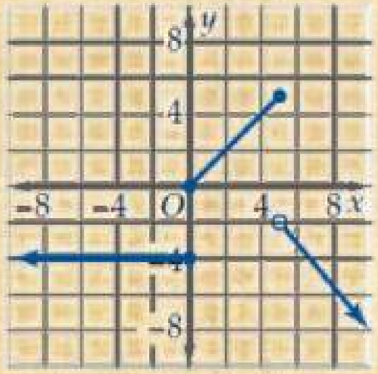
معتمدًا على اختبار الخط الرأسي ، حدد إذا كان كل من التمثيلين الآتيين يمثل دالة أم لا، وبرر إجابتك.

36



دالة، لا يقطع أي خط رأسي المنحنى أكثر من مرة.

37



ليست دالة، لأن الخط الرأسي (المحور y) يقطع التمثيل البياني في النقطتين $(0 , 0)$ ، $(0 , -4)$

38

رياضة : تتكون مسابقة رياضية من ثلاث مراحل: سباحة 0.4mi، وقيادة دراجة هوائية 5mi، وجري مسافة 2.6mi. فإذا كان معدل سرعة عزام في كل مرحلة من المراحل الثلاث كما في الجدول أدناه:

المرحلة	معدل السرعة
السباحة	4 mi/ h
قيادة الدراجة	20 mi/ h
الجري	6 mi/ h

a) اكتب دالة متعددة التعريف تمثّل المسافة D التي قطعها عزام بدلالة الزمن t، مقرّبًا t إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

$$D(t) = \begin{cases} 4t & , \ 0 \le t \le 0.1 \\ 20t & , \ 0.1 < t \le 0.35 \\ 6t & , \ 0.35 < t \le 0.78 \end{cases}$$

b) حدّد مجال الدالة. $[0 , 0.78]$

الحل

39 هندسة: يمثّل الشكل أدناه دائرة مساحتها A ومحيطها C.

a) اكتب المساحة كدالة في المحيط.

$A = \frac{C^2}{4\pi}$

b) أوجد $A(4), A(0.5)$.

$A(4)= 1.27$ ، $A(0.5)= 0.02$

c) ما تأثير زيادة المحيط في المساحة؟

كلما زاد المحيط زادت المساحة.

40 حسابات: تتناقص قيمة بعض المعدات أو الآلات مع مرور الزمن، وتُستعمل الدوال الخطية لتمثيل هذا التناقص. فإذا كانت $v(t) = 1800 - 30t$ تمثّل قيمة حاسوب بالريال، بعد t شهر من شرائه، فحدّد مجال هذه الدالة.

$D = \{t \mid 0 \le t \le 60 , t \in N\}$

الحل

أوجد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f(a+h)$, $f(a)$ ، حيث $h \neq 0$ لكل مما يأتي:

41 $f(x) = -5$

$-5 , -5 , 0$

42 $f(x) = \sqrt{x}$

$\sqrt{a}$, $\sqrt{a+h}$, $\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

43 $f(x) = \frac{1}{x+4}$

$\frac{1}{a+4}$, $\frac{1}{a+h+4}$, $\frac{-1}{a^2+ah+8a+4h+16}$

44 $f(x) = x^2 - 6x + 8$

$2a - 6 + h$, $a^2 + 2ah + h^2 - 6a - 6h + 8$, $2a + h - 6$

45 $f(x) = -14x + 6$

$-14a + 6$, $-14a - 14h + 6$, -14

46 $f(x) = x^3 + 9$

$a^3 + 9$, $a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 9$, $3a^2 + 3ah + h^2$

47 $f(x) = 5x^2$

$5a^2$, $5a^2 + 10ah + 5h^2$, $10a + 5h$

48 $f(x) = x^3$

a^3 , $a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$, $3a^2 + 3ah + h^2$

الحل

49 **صناعة:** في أحد المعامل الوطنية يتم صنع أغلفة بريدية متفاوتة الأبعاد، بحيث تكون نسبة طول الغلاف إلى عرضه من 1.3 إلى 2.5. فإذا كانت أصغر قيمة لطول الأغلفة المنتجة 5 in، وأكبر قيمة $11\frac{1}{2}$ in، فأجب عما يأتي:

a) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في طوله ℓ، إذا كانت نسبة طول الظرف إلى عرضه 1.8، ثم اكتب مجال الدالة.

$A(\ell) = \frac{\ell^2}{1.8}$;[5,11.5]

b) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في عرضه h، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 2.1، ثم اكتب مجال الدالة.

$A(h) = 2.1h^2$,[2.4,5.5]

c) أوجد مساحة الغلاف عند أكبر طول ممكن له، وأكبر نسبة بين طوله وعرضه.

52.9 in^2

في كل من العلاقتين الآتيتين، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا. برر إجابتك.

50 $x = |y|$

لا؛ لأن كل قيمة من قيم المدى ترتبط بقيمتين من المجال، ولحل المعادلة بالنسبة إلى y يكون هناك قيمتان موجبة وسالبة والقيمة المطلقة لا تعطى قيمة y.

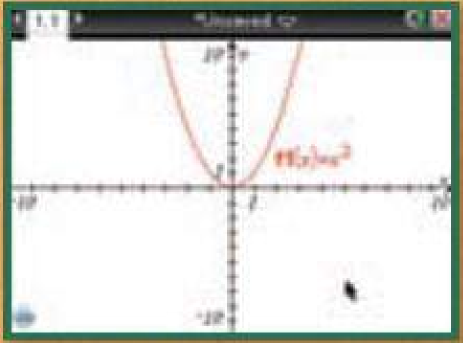
51 $x = y^3$

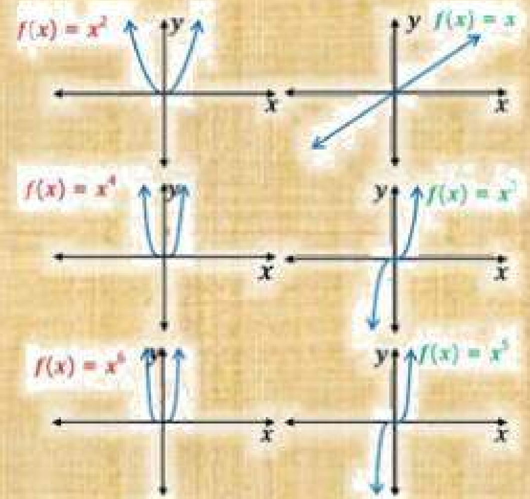
نعم؛ لأن كل قيمة في المدى ترتبط بقيمة واحدة من المجال لذا تمثل دالة.

الحل

52 تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة مدى دالة $f(x) = x^n$، حيث $n \in N$.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة $f(x) = x^n$ بيانيًا لقيم n الصحيحة من 1 إلى 6.





n	المدى
1	$(-\infty, \infty)$
2	$[0, \infty)$
3	$(-\infty, \infty)$
4	$[0, \infty)$
5	$(-\infty, \infty)$
6	$[0, \infty)$

b) **جدوليًا:** تنبأ بمدى كل دالة من الدوال التي مثّلتها في الفرع a، واعرضه في جدول يتضمن قيم n، والمدى المرتبط بكل منها.

c) **لفظيًا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n زوجيًا.

يكون المدى $[0, \infty)$ إذا كانت n زوجية.

d) **لفظيًا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n فرديًا.

يكون المدى $(-\infty, \infty)$ إذا كانت n فردية.

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

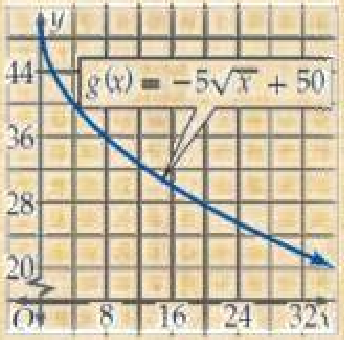
١ـ٢

تدريب وحل المسائل

الحل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقق من إجابتك جبريًا. وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك: (مثال 1)

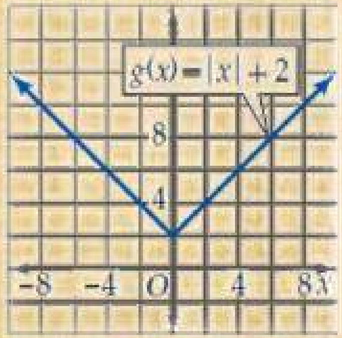
1



a) $g(6)$ b) $g(12)$ c) $g(19)$

37.75   32.68   28.21

2



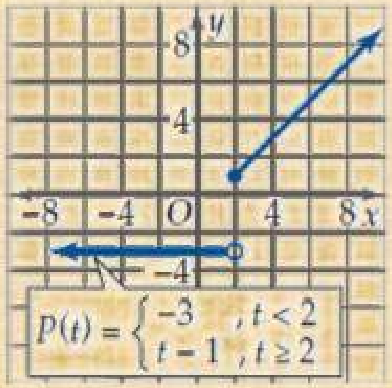
a) $g(-8)$ b) $g(-3)$ c) $g(0)$

10   5   2

عودة لفهرس الفصل (١)

الحل

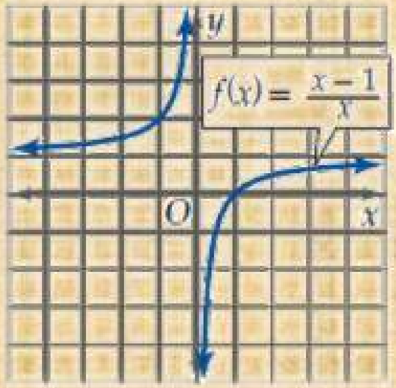
3



$P(9)$ (c $P(2)$ (b $P(-6)$ (a

8 1 -3

4



$f(0)$ (c $f(0.5)$ (b $f(-3)$ (a

0 -1 $\frac{4}{3}$

الحل

5

مياه: إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (1421هـ إلى 1428هـ) معطاة بالدالة

$$f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$$

حيث x رقم السنة منذ 1421 هـ. (مثال 1)

a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ باستعمال التمثيل البياني.

145مليون متر مكعب.

b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ جبريًا مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

147.4مليون متر مكعب.

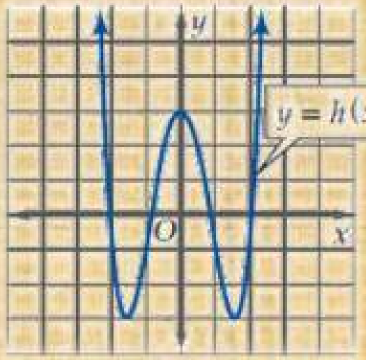
c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني، وتحقق من إجابتك جبريًا.

1422هـ.

الحل

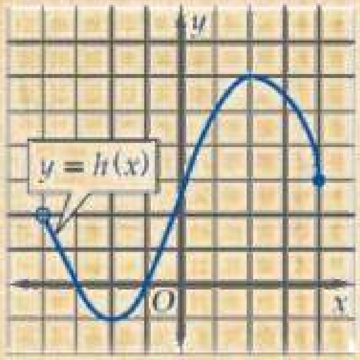
استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كلٍّ من مجال الدالة ومداها. (مثال 2)

6



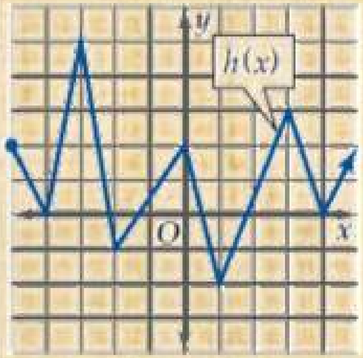
المجال: $\{x \mid x \in R\}$،
المدى: $[-3, \infty)$

7



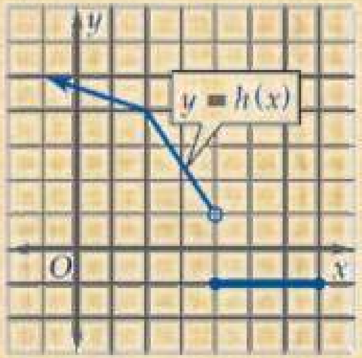
المجال: $(-4, 4]$،
المدى: $[-1, 6]$

8



المجال: $[-5, \infty)$،
المدى: $[-2, \infty)$

9



المجال: $(-\infty, 7]$،
المدى: $[-1] \cup (1, \infty)$

الحل

10 هندسة: أجريت اختبارات على الخصائص الفيزيائية لعينات من أربع قطع معدنية، حيث أخضعت لدرجات حرارة سيليزية مختلفة. فإذا كانت الطاقة المخزنة أو الممتصة في العينة خلال الاختبار مقاسة بالجول (J) كما هو موضح في الشكل، فأجب عما يأتي: (مثال 2)

a) أوجد المجال والمدى لكل دالة.

المعدن	المدى	المجال
النحاس	$\{y \mid y = 1.75\}$	$\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$
الألمونيوم	$\{y \mid 0.6 \le y \le 1.5, y \in R\}$	
الزنك	$y \mid 0.5 \le y \le 1.25, y \in R\}$	
الفولاذ	$\{y \mid 0.2 \le y \le 1.75, y \in R\}$	

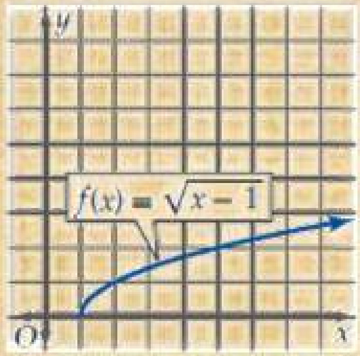
b) استعمل التمثيل البياني لتقدير الطاقة المخزنة في كل معدن عند الصفر السيليزي.

المعدن	الطاقة المخزنة
النحاس	1.75 جول
الألمونيوم	1.2 جول
الزنك	0.5 جول
الفولاذ	1.5 جول

الحل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لإيجاد مقطع المحور y، وأصفار الدالة، ثم أوجد هذه القيم جبرياً: (المثالان 3, 4)

11

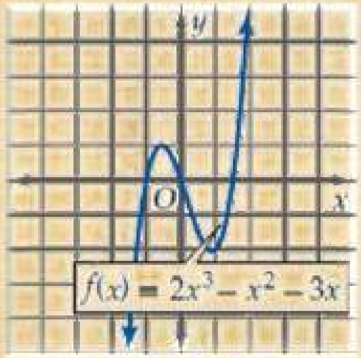


مقطع x = 1 ، لا يوجد مقطع y

جبرياً:

$\sqrt{x - 1} = 0 \longrightarrow x = 1$

12



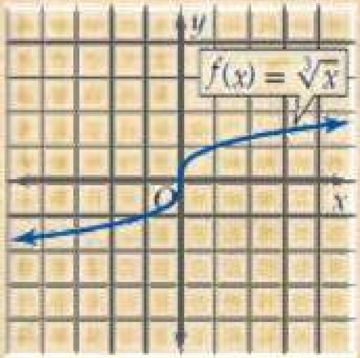
مقطع $x = -1 , 0 , 1.5$

مقطع $y = 0$

جبرياً: $x(2x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 0 , 1.5 , -1$

13



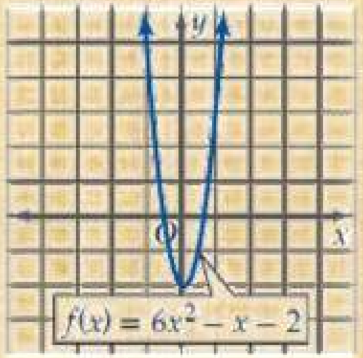
مقطع x = 0 ، مقطع y = 0

جبرياً:

$\sqrt[3]{x} = 0 \longrightarrow x = 0$

$x = 0 \longrightarrow y = 0$

14



مقطع $x = -0.5 , 0.6$

مقطع $y = -2$

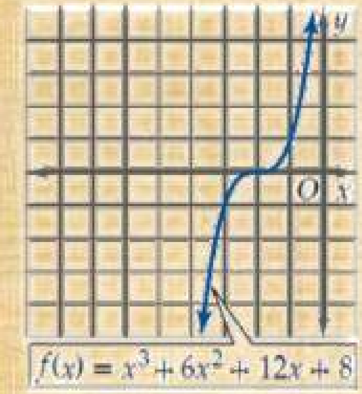
جبرياً: $(2x + 1)(3x - 2) = 0$

$x = -0.5 , x = 0.66$

$x = 0 \longrightarrow y = -2$

الحل

15



مقطع $x = -2$

مقطع $y = 8$

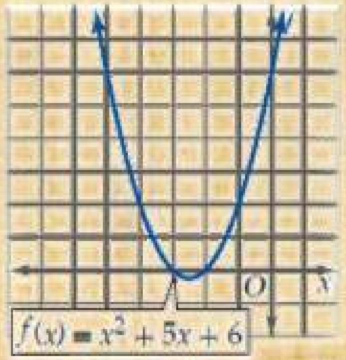
جبرياً: $(x + 2)(x + 4x + 4) = 0$

$(x + 2)(x + 2)(x + 2) = 0$

$x = -2$

$x = 0 \longrightarrow y = 8$

16



مقطع $x = -2 , -3$

مقطع $y = 6$

جبرياً: $x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x + 2)(x + 3) = 0$

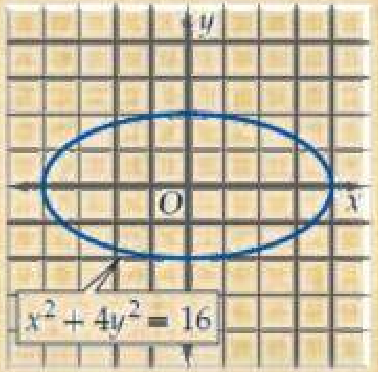
$x = -2 , -3$

$x = 0 \longrightarrow y = 6$

الحل

استعمل التمثيل البياني لكلٍ معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقق منها جبريًا: (مثال 5)

17



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل.

x	y	(x, y)
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
2	$-\sqrt{3}$	$(2, -\sqrt{3})$

بما أن $x^2 + 4(-y)^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$، فإن منحنى الدالة متماثل حول المحور x.

x	y	(x, y)
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
-2	$\sqrt{3}$	$(-2, \sqrt{3})$

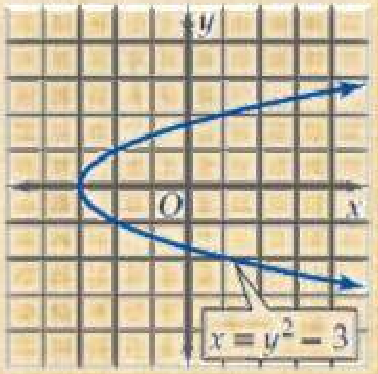
بما أن $(-x)^2 + 4y^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

x	y	(x, y)
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
-2	$-\sqrt{3}$	$(-2, -\sqrt{3})$

بما أن $(-x)^2 + 4(-y)^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

الحل

18



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x
بما أن $x = (-y)^2 - 3$ تكافئ $x = y^2 - 3$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

x	y	(x, y)
1	2	(1, 2)
1	− 2	(1, − 2)

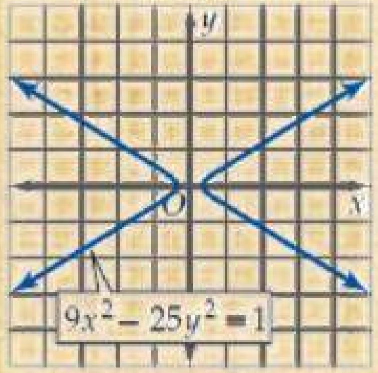
19

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل. بما أن $-x = -(-y)$ تكافئ $x = -y$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

x	y	(x, y)
− 2	2	(− 2, 2)
2	− 2	(2, − 2)

الحل

20



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x، ومحور y، ونقطة الأصل.

x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

بما أن $9x^2-25(-y)^2$ تكافئ $9x^2-25y^2=1$ ، فإن المنحنى متماثل حول محور x.

x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
−1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

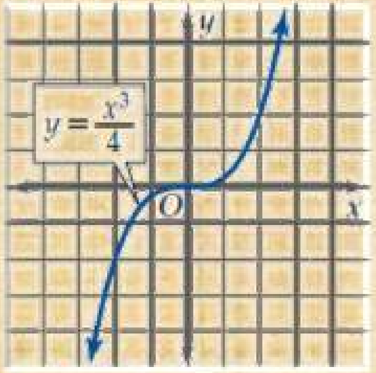
بما أن $9(-x)^2-25y^2=1$ تكافئ $9x^2-25y^2=1$. فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
−1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

بما أن $9(-x)^2-25(-y)^2=1$ تكافئ $9x^2-25y^2=1$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

الحل

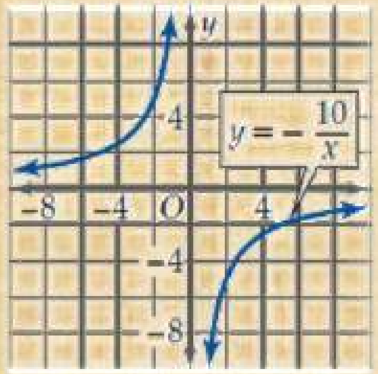
21



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل. بما أن $\frac{(-x)^3}{4} = -y$ تكافئ $y = \frac{x^3}{4}$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

x	y	(x, y)
1	$\frac{1}{4}$	$\left(1, \frac{1}{4}\right)$
−1	$\frac{1}{4}$	$\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$

22

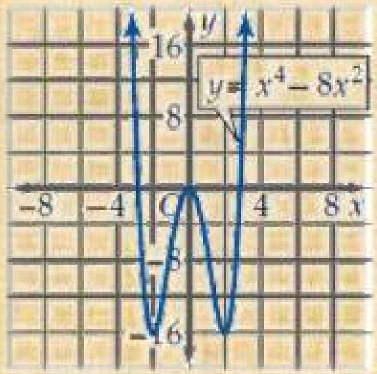


يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل. بما أن $-\frac{10}{(-x)} = -y$ تكافئ $y = -\frac{10}{x}$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

x	y	(x, y)
1	−10	$(1, -10)$
−1	10	$(-1, 10)$

الحل

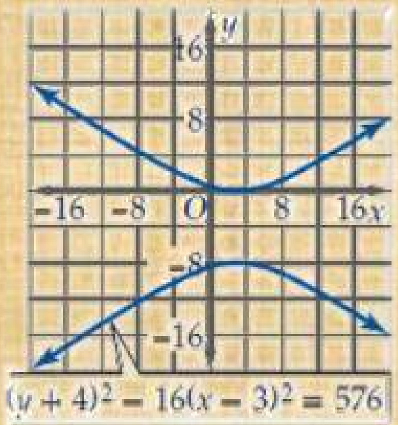
23



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y. بما أن $y = (-x)^4 - 8(-x)^2$ تكافئ $y = x^4 - 8x^2$، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

x	y	(x, y)
1	−7	(1 , −7)
−1	−7	(−1 , −7)

24

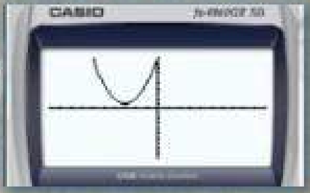


لا يوجد تماثل.

الحل

الحاسبة البيانية : استعمل الحاسبة البيانية لتمثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًا. و إذا كانت الدالة زوجيّة أو فردية فصف تماثل منحناها: (مثال 6)

25 $f(x) = x^2 + 6x + 10$

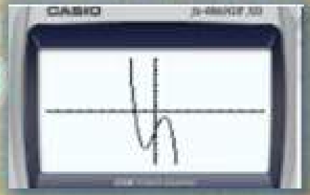


$f(x) \neq f(-x)$

$f(-x) \neq -f(x)$

الدالة ليست زوجية وليست فردية

26 $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$

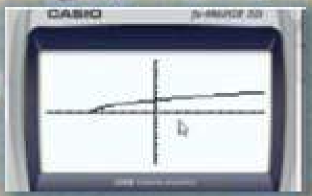


$f(x) \neq f(-x)$

$f(-x) \neq -f(x)$

الدالة ليست زوجية وليست فردية

27 $g(x) = \sqrt{x + 6}$



$g(x) \neq g(-x)$

$g(-x) \neq -g(x)$

الدالة ليست زوجية وليست فردية

28 $h(x) = |8 - 2x|$

$h(x) \neq h(-x)$

$h(-x) \neq -h(x)$

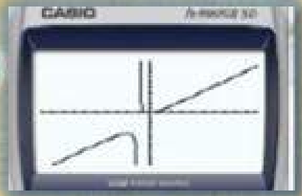
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

29 $f(x) = |x^3|$

$f(x) = f(-x) = x^3$

∴ الدالة زوجية

30 $g(x) = \frac{x^2}{x + 1}$



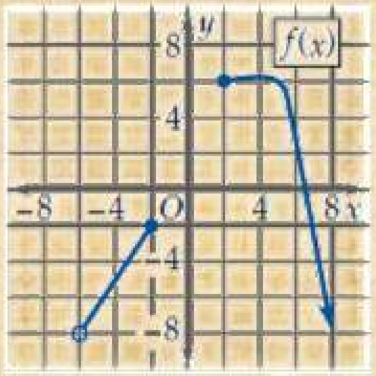
$g(x) \neq g(-x)$

$g(-x) \neq -g(x)$

الدالة ليست زوجية وليست فردية

الحل

31 استعمل التمثيل البياني للدالة f لتقدير قيمها المطلوبة:



$f(-2)$ (a

-2

$f(-4)$ (b

-5

$f(2)$ (c

6

الحل

32 مبيعات: إذا كان عدد أجهزة التبريد التي باعها محل للأجهزة الكهربائية مقدرًا بالآلاف خلال الفترة 1422هـ إلى 1426هـ يُعطى بالدالة $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$، حيث x رقم السنة منذ 1422 هـ .

a) اكتب المجال المناسب للدالة، ثم قرّب مداها .

المجال: $\{x \mid 0 \le x \le 4, x \in W\}$

المدى: $\{y \mid 1200 \le y \le 11200, y \in R\}$

b) استعمل المنحنى لتقدير عدد الأجهزة المبيعة سنة 1424هـ ، ثم أوجد ذلك جبريًا.

4300 جهاز. وجبريًا: 4200 جهاز.

c) استعمل المنحنى لتقدير قيمة المقطع y للدالة ثم أوجده جبريًا. ماذا يمثل المقطع y؟

1100، وجبريًا: 1200 . ويمثل القطع y عدد الأجهزة المبيعة سنة 1422هـ.

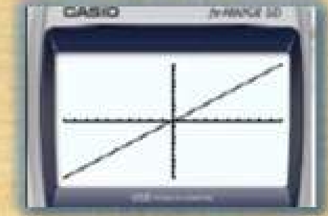
d) هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد قيمة تقريبية لهذه الأصفار، وفسر معناها. وإذا كانت الإجابة لا، فوضّح السبب.

لا يوجد لهذه الدالة الأصفار. لأنه لكل سنة من سنوات المجال يوجد عدد من الأجهزة المبيعة.

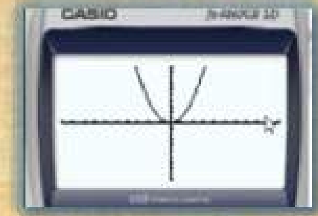
33 دوال: إذا كانت $f(x) = x^n$ ، حيث $n \in N$ فأجب عن الأسئلة الآتية:

الحل

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل $f(x)$ بيانيًا لكل قيمة من قيم n في الفترة $1 \le n \le 6$.

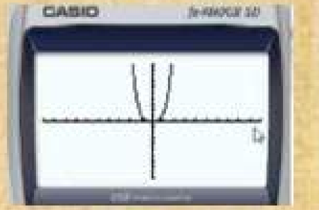


$x = 1$



$x = 2$

$x = 3$



$x = 4$

b) اكتب المجال والمدى لكل دالة.

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
المجال	R	R	R	R
المدى	R	$[0,\infty)$	R	$[0,\infty)$

c) صف التماثل لكل دالة.

$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
يتضح من التمثيل البياني أن الدالة فردية أي أنها متماثلة حول نقطة الأصل	يتضح من التمثيل البياني أن الدالة زوجية أي أنها متماثلة حول محور y	يتضح من التمثيل البياني أن الدالة فردية أي أنها متماثلة حول نقطة الأصل	يتضح من التمثيل البياني أن الدالة زوجية أي أنها متماثلة حول محور y

d) تنبأ بمجال الدالة $f(x) = x^{35}$ ، ومداها، وتماثلها، ثم برر إجابتك.

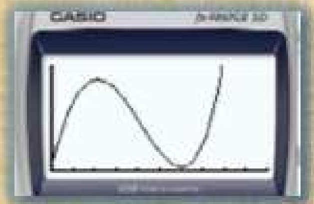
N=35 (فردية) أي أن الدالة فردية مجالها R ومداها R ، ومتماثلة حول نقطة الأصل

الحل

34

صيدلة: إذا كان عدد ملجرامات الدواء في دم مريض بعد x ساعة من تناوله الدواء يعطى بالدالة: $f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة بيانيًا.



b) اكتب المجال المناسب للدالة، وبرّر إجابتك.

المجال المناسب [0,6] حيث تتناقص الدالة (مفعول الدواء) وصولا الى القيمة 6

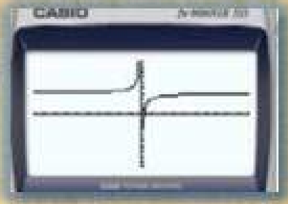
c) ما أكبر عدد من ملجرامات الدواء يكون موجودًا في دم المريض وفق هذه الدالة؟

أكبر عدد من الملجرامات يكون عند القمة (max) يساوي 346 ملجرام تقريباً

الحل

الحاسبة البيانية: مثّل كلًا من الدوال الآتية بيانيًا، وحدّد أصفارها، ثم تحقّق من أصفار الدالة جبريًا:

35) $f(x) = \frac{4x-1}{x}$



أصفار الدالة : 0.25

36) $f(x) = \frac{x^2+9}{x+3}$

لا يوجد أصفار

37) $h(x) = 2\sqrt{x+12} - 8$

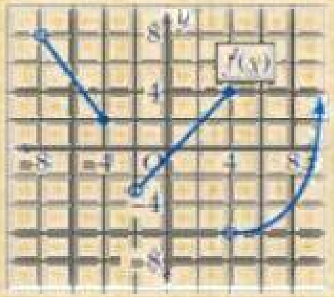
أصفار الدالة : 4

38) $g(x) = -12 + \frac{4}{x}$

أصفار الدالة : $\frac{1}{3}$

استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحدد مجالها ومداها في كل مما يأتي:

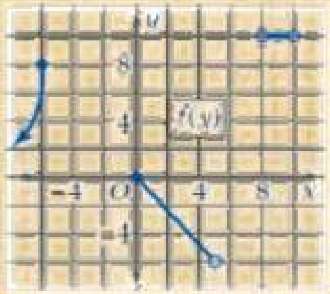
39)



المجال: $(-8, -4] \cup (-2, \infty)$

المدى: $(-6, \infty)$

40)



المجال: $(-\infty, -6] \cup [0, 5) \cup (8, 10)$

المدى: $(-\infty, 8] \cup [10]$

الحل

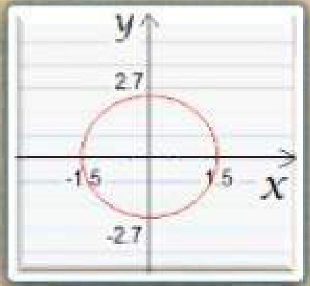
41 فيزياء: إذا كان مسار أحد المذنبات حول الشمس يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{10} = 1$$

a) صف تماثل منحني مسار المذنب.

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل وحول محور x وحول محور y

b) استعمل التماثل لتمثيل منحنى العلاقة.



c) إذا مر المذنب بالنقطة $(2, \sqrt{5})$، فعيّن ثلاث نقاط أخرى يجب أن يمر بها المذنب.

$(-2, \sqrt{5})$, $(2, -\sqrt{5})$, $(-2, -\sqrt{5})$

الحل

42

أسهم: افرض أن النسبة المئوية للتغير في سعر سهم خلال سنة واحدة تعطى بالدالة:

$$p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$$

حيث x رقم الشهر بدءًا من شهر يناير.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة بيانيًا.

b) عيّن المجال المناسب للدالة، ثم قدّر مداها.

c) استعمل المنحنى لتقريب قيمة المقطع y، وماذا يمثّل؟

d) أوجد أصفار الدالة، ووضح معناها.

الحل

43 تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة مدى قيم الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ عندما تقترب x من العدد 2.

a) **جدوليًا:** انقل الجدول الآتي إلى دفترك، وأضف قيمًا أخرى للمتغير x إلى يمين العدد 2 وإلى يساره. ثم أكمل الجدول.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$					

b) **تحليليًا:** معتمدًا على جدولك، ما القيمة أو القيم التي تقترب منها الدالة عندما تقترب x من العدد 2؟

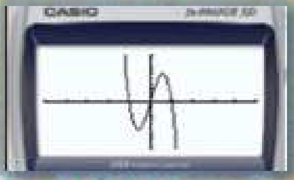
c) **بيانيًا:** مثّل الدالة بيانيًا. وهل يؤكد التمثيل البياني تخمينك في الفرع **b** ؟ وضح إجابتك.

d) **لفظيًا:** خمّن القيمة التي تقترب منها الدالة من خلال التمثيل البياني في الفرع **c** ووضح أي تناقض يظهر في التمثيل.

الحل

الحاسبة البيانية : مثّل كلاً من الدوال الآتية بيانيًا، و حدّد إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

44 $h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$

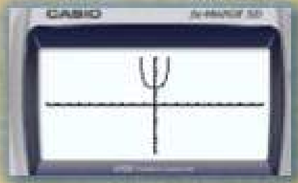


تماثل حول نقطة الأصل، الدالة فردية.

45 $f(x) = x^2 - x - 6$

لا يوجد تماثل؛ ليست فردية ولا زوجية.

46 $h(x) = x^6 + 4$



تماثل حول محور الصادات؛ الدالة زوجية.

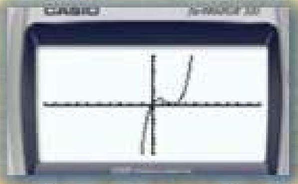
47 $f(g) = g^9$

تماثل حول نقطة الأصل؛ الدالة فردية.

48 $g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$

تماثل حول محور الصادات، الدالة زوجية.

49 $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$



لا يوجد تماثل، ليست فردية وليست زوجية.

الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

١ ـ ٣

تدريب وحل المسائل

الحل

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدِّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (المثالان 1، 2)

1 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$، عند $x = -5$.

❶ $f(-5) = \sqrt{(-5)^2 - 4} = 4.58$ الدالة معرفة.

❷ $\lim_{x \to -5^+} f(x) = \lim_{x \to -5^-} f(x) = 4.58$ النهاية موجودة.

❸ $\lim_{x \to -5} f(x) = f(-5)$

لذا؛ الدالة متصلة عند $x = -5$.

2 $f(x) = \sqrt{x + 5}$، عند $x = 8$.

❶ $f(8) = \sqrt{8 + 5} = 3.61$ الدالة معرفة.

❷ $\lim_{x \to 8^+} f(x) = \lim_{x \to 8^-} f(x) = 3.61$ النهاية موجودة.

❸ $\lim_{x \to 8} f(x) = f(8)$

لذا؛ الدالة متصلة عند $x = 8$.

عودة لفهرس الفصل (١)

الحل

3 $h(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$، عند $x = -6$ و $x = 6$.

عند $x = -6$

❶ $h(-6)$ غير موجودة.

لذا؛ للدالة عدم اتصال نقطي قابل للإزالة، لأن النهاية موجودة.

عند $x = 6$

❶ $h(6)$ الدالة معرفة.

❷ النهاية موجودة.

❸ $\lim_{x \to 6} h(x) = h(6)$

لذا؛ الدالة متصلة عند $x = 6$.

4 $g(x) = \frac{x}{x - 1}$، عند $x = 1$.

❶ $g(1)$ غير موجودة.

❷ النهاية غير موجودة.

لذا؛ للدالة عدم اتصال لا نهائي غير قابل للإزالة.

الحل

5) $h(x) = \frac{x-4}{x^2-5x+4}$ ، عند $x = 1$ و $x = 4$.

عند $x = 4$

❶ $h(4)$ غير موجودة.

❷ النهاية موجودة.

لذا؛ للدالة عدم اتصال نقطي قابل للإزالة.

عند $x = 1$

❶ $h(1)$ غير موجودة.

❷ النهاية غير موجودة.

لذا؛ للدالة عدم اتصال لا نهائي.

6) $h(x) = \frac{x(x-6)}{x^3}$ ، عند $x = 0$ و $x = 6$.

عند $x = 6$

❶ $h(6)$ الدالة معرفة.

❷ النهاية موجودة.

❸ $\lim_{x \to 6} f(x) = f(6)$

لذا: الدالة متصلة عند $x = 6$.

عند $x = 0$

❶ $h(0)$ غير موجودة.

❷ النهاية غير موجودة.

لذا؛ للدالة عدم اتصال لا نهائي.

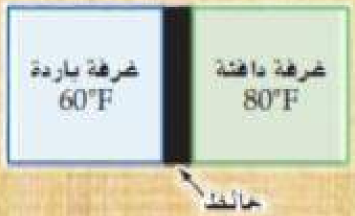
7) $f(x) = \begin{cases} 4x-1 & , x \le -6 \\ -x+2 & , x > -6 \end{cases}$ ، عند $x = -6$.

❶ $f(-6)$ الدالة معرفة.

❷ النهاية غير موجودة، لذا؛ للدالة عدم اتصال قفزي.

الحل

8 فيزياء: غرفتان درجتا حرارتيهما مختلفتان يفصل بينهما حائط، تنتقل الحرارة بين الغرفتين عبر الحائط حسب العلاقة $f(w) = \frac{7.4}{w}$، حيث $f(w)$ كمية الحرارة بالواط و w سمك الحائط بالمتر. (المثالان 1, 2)



a) حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w = 0.4$، وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

❶ الدالة معرفه.

❷ النهاية موجودة.

❸ $\lim_{w \to 0.4} f(w) = f(0.4)$

لذا: الدالة متصلة عند $w = 0.4$.

b) حدِّد نقاط عدم الاتصال للدالة (إن وجدت)، وما نوعها؟

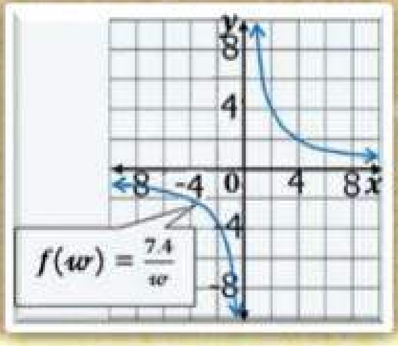
عند $w = 0$.

❶ $f(0)$ غير موجودة.

❷ النهاية غير موجودة.

لذا: للدالة عدم اتصال لا نهائي.

c) مثِّل الدالة بيانيًّا للتحقق مما توصلت إليه في الفرع b .



الحل

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (الأمثلة 4 ,3)

9 $f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$

[1, 2]

10 $g(x) = -x^3 + 6x + 2, [-4, 4]$

[-3, -2] ، [-1, 0] ، [2, 3]

11 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3, [-3, 3]$

[-1, 0] ، [1, 2]

12 $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 5}, [-2, 4]$

لا يوجد أصفار للداله فى الفتره المعطاه

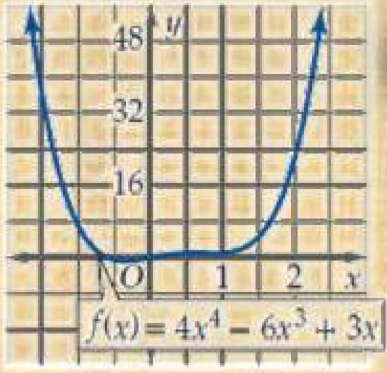
13 $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5, [0, 5]$

[2, 3]

الحل

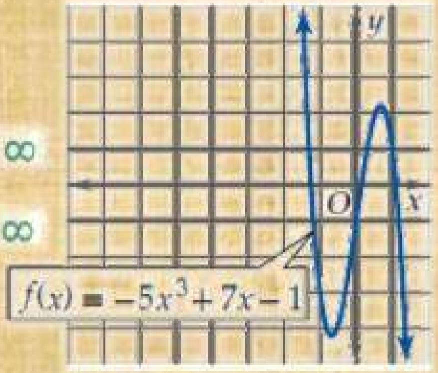
استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا. (المثالان 5, 6)

14



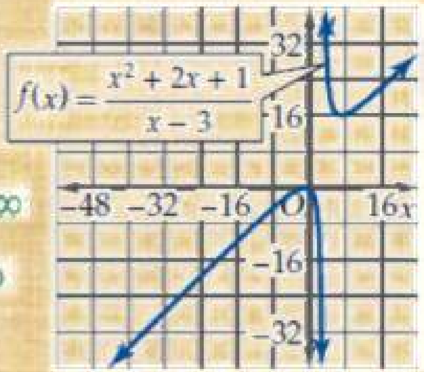
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ،
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

15



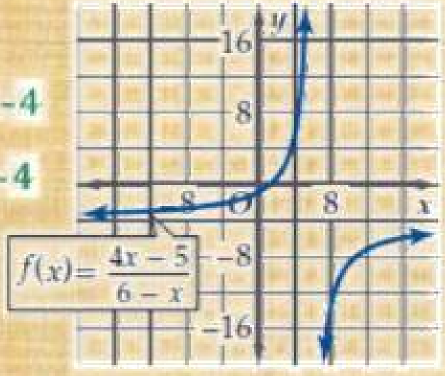
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ،
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

16



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ،
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

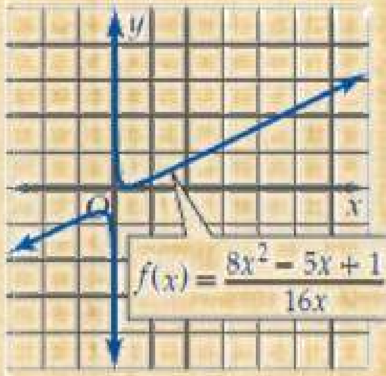
17



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$ ،
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -4$

الحل

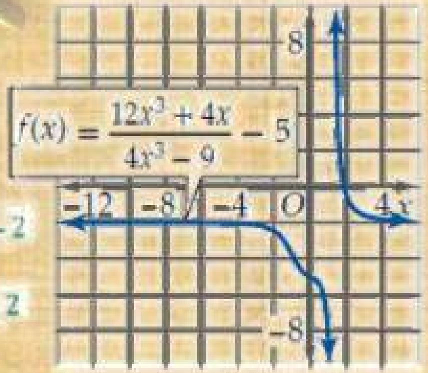
18



$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ ،

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$

19

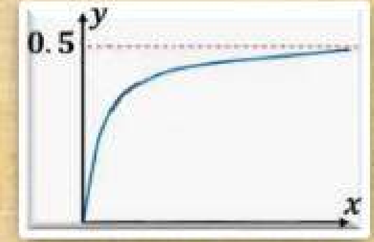


$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$ ،

$\lim_{x\to \infty} f(x) = -2$

20 كيمياء: حدد ما إذا كانت الدالة متصلة يعطي معدل التفاعل R في تجربة كيميائية بالدالة $R(x) = \frac{0.5x}{x + 12}$، حيث x تركيز المحلول بالملجرام لكل لتر. (مثال 6)

a) مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.



b) صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وماذا يعني في التجربة؟ عزز إجابتك عدديًا.

يبين سلوك طرفي التمثيل البياني أنه إذا زاد تركيز المحلول يقترب معدل التفاعل الكيميائي من 0.5

الحل

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرف التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، عندما تقترب x من ∞
برر إجابتك. (مثال 7)

21 $q(x) = -\frac{24}{x}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $q(x)$ تقترب من 0

22 $f(x) = \frac{0.8}{x^2}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $q(x)$ تقترب من 0

23 $m(x) = \frac{4+x}{2x+6}$

عندما $x \to \infty$ فإن الكسر يقترب من $\frac{1}{2}$. لذا فإن $m(x)$ تقترب من $\frac{1}{2}$.

24 $c(x) = \frac{5x^2}{x^3+2x+1}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $q(x)$ تقترب من 0

25 $k(x) = \frac{4x^2-3x-1}{11x}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تتزايد. لذا فإن $k(x)$ تؤول إلى ∞

26 $g(x) = x^4 - 9x^2 + \frac{x}{4}$

عندما $x \to \infty$ فإن قيمة الكسر تتزايد. لذا فإن $g(x)$ تؤول إلى ∞

27 $p(x) = \frac{x+1}{x-2}$

عندما $x \to \infty$ فإن الكسر يقترب من 1. لذا فإن $p(x)$ تقترب من 1

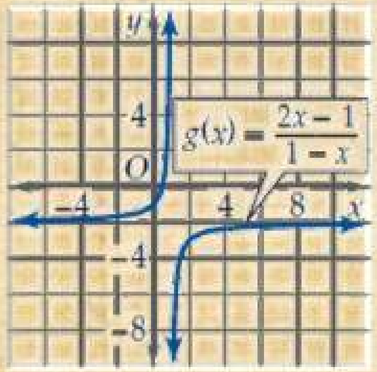
الحل

28 **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$ ، حيث p الزخم ، m كتلة الجسم. إذا وضع رمل في شاحنة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟ (مثال 7)

عندما تتزايد كتلة الجسم، فان طاقة السيارة الحركية تقترب من 0

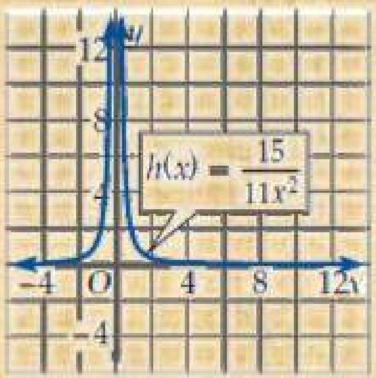
استعمل كلًا من التمثيلين البيانيين الآتيين لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. برر إجابتك.

29



- قيمة x التي تكون الدالة غير متصلة عندها هي $x = 1$.
- نوع عدم الاتصال، لا نهائي (غير معرفة والنهاية غير موجودة عند x=1)
- سلوك طرفي التمثيل البياني $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = -2$

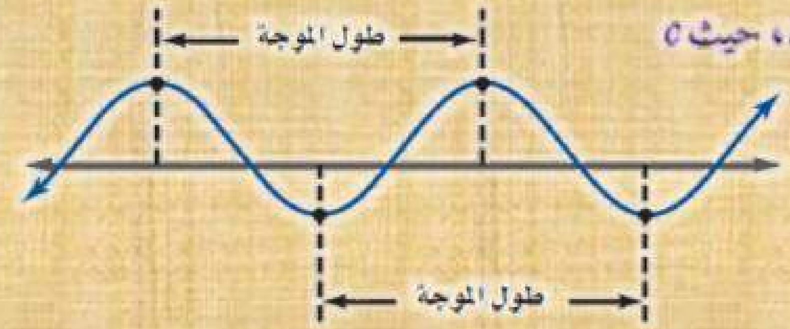
30



- قيمة x التي تكون الدالة غير متصلة عندها هي $x = 0$.
- نوع عدم الاتصال، لا نهائي (غير معرفة والنهاية غير موجودة عند x=0)
- سلوك طرفي التمثيل البياني $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 0$

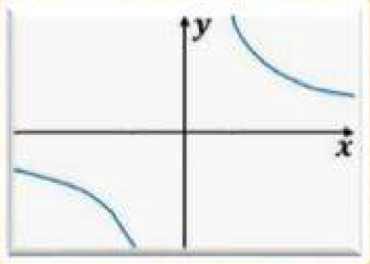
الحل

31 فيزياء: تُسمّى المسافة بين نقطتين متناظرتين على موجتي ضوء متتاليتين بطول الموجة λ (ويقرأ لامدا)، ويُسمّى عدد الموجات الكاملة التي تمر بنقطة خلال مدة زمنية محددة بالتردد f.



وتصف الدالة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$ العلاقة بين طول الموجة والتردد، حيث c سرعة الضوء ومقدارها $2.99 \cdot 10^8 m/s$.

a) مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.



b) استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعزز تخمينك عدديًا.

$$\lim_{x\to -\infty} f(\lambda) = \lim_{x\to \infty} f(\lambda) = 0$$

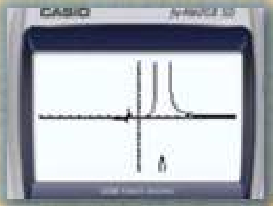
c) هل الدالة متصلة؟ إذا كان الجواب لا، فعيّن نقاط عدم الاتصال.

لا، عدم اتصال لا نهائي عند $\lambda = 0$

الحل

الحاسبة البيانية : مثّل كلًا من الدوال الآتية بيانيًا، ثم حدد ما إذا كانت متصلة أو لا. وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال وحدد نقاطه، ثم صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعيّن أصفار الدالة إن وجدت.

32 $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$



الدالة	غير متصلة
نوعها	لا نهائي، عند $x = -1,\ x = 2\ ,\ x = 3$
سلوك نهاية الدالة	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
أصفار الدالة	$x = 0$

33 $h(x) = \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$

الدالة	غير متصلة
نوعها	لا نهائي، عند $x = -6\ ,\ x = 3$
سلوك نهاية الدالة	$\lim_{x\to} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = 4$
الأصفار	$x = -3$ ، $x = 0.25$

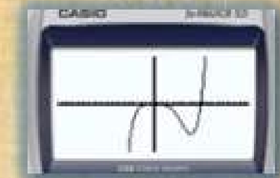
34 $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

الدالة	غير متصلة
نوعها	لا نهائي، عند $x = -4\ ,\ x = 3$
سلوك نهاية الدالة	$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$
الأصفار	$x = -5$ ، $x = 4$ ، $x = 6$

الحل

الحاسبة البيانية: مثّل بيانيًا كلًّا من الدوال الآتية وصف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعزز إجابتك عدديًا.

35 $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

36 $f(x) = \frac{16x^2}{x^2 + 15x}$

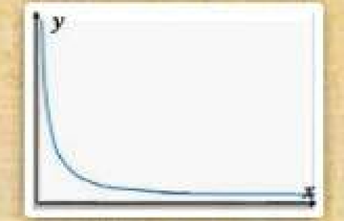
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 16$ ، $\lim_{x \to \infty} f(x) = 16$

37 أعمال: بدأ حمد مشروعًا تجاريًا صغيرًا بالطباعة على القمصان وبيعها. إذا كانت تكلفة الطباعة على القميص الواحد 9 ريالات، وتكلفة المعدات اللازمة 12000 ريال، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تبيّن معدّل تكلفة الطباعة على القميص الواحد على صورة دالة في عدد القمصان المنتجة n.

$$f(n) = \frac{9n+12000}{n}$$

b) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة.



c) إذا استمر ازدياد عدد القمصان المنتجة، فكم سيصبح معدل تكلفة الطباعة على القميص الواحد؟

9 ريالات، عندما تؤول n إلى ∞، فإن $f(n)$ تؤول إلى 9.
لذا يكون معدل تكلفة القميص الواحد 9 ريالات عندما يتزايد عدد القمصان المنتجة بشكل كبير.

الحل

38 تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة النهايات.

افرض أن $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر، و b و d عددان صحيحان.

a) **جدوليًا:** افرض أن $c = 1$ و اختر ثلاث مجموعات مختلفة لقيم a, b, d . ثم اكتب الدالة في كل حالة وأكمل الجدول :

$c = 1$				
a	b	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
-1	5	7	-1	-1
9	-6	8	9	9

b) **جدوليًا:** اختر ثلاث مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير، مجموعة فيها $a > c$، ومجموعة فيها $a < c$، ومجموعة فيها $a = c$. ثم اكتب كل دالة، وكوّن جدولاً كما في الفرع a.

	$f(x) = \frac{ax^3+b}{cx^3+d}$					
	a	b	c	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
$a>c$	6	-5	3	1	2	2
$a<c$	3	4	12	13	0.25	0.25
$a=c$	7	1	7	-4	1	1

c) **تحليليًا:** خمّن قيمة نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من $-\infty$، و $+\infty$.

نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3+b}{cx^3+d}$ عندما تقترب x من كل من ∞، $-\infty$ تساوي $\frac{a}{c}$.

الحل

39 الحاسبة البيانية : مثّل 6 دوال مختلفة على الصورة $f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ بيانيًا، حيث n, a, b أعداد صحيحة غير سالبة

a) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا زوجيًا موجبًا، ثم عزز إجابتك بيانيًا.

اذا كان n عدداً زوجياً، فإن طرفي المنحنى يقتربان من ∞.

b) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا فرديًا موجبًا ، ثم عزز إجابتك بالتمثيل البياني.

إذا كان n عدداً فرديًا ، فإن طرف التمثيل البياني من اليسار يؤول الى ∞- وطرف المنحنى من اليمين يؤول الى ∞.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

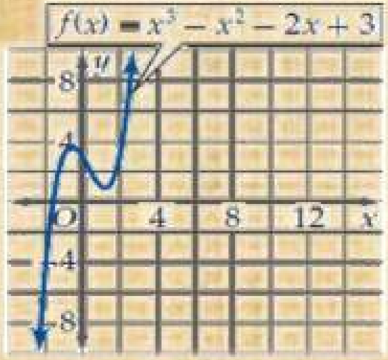
١ـ٤

تدريب وحل المسائل

الحل

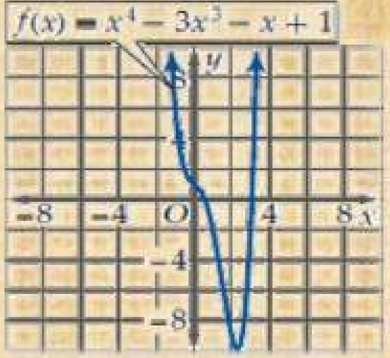
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًا: (مثال 1)

1



f متزايدة في الفترة $(-\infty, -0.5)$،
ومتناقصة في الفترة $(-0.5, 1)$،
ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

2

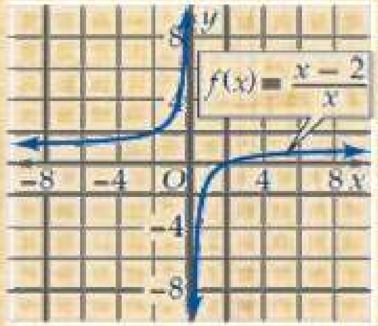


f متناقصة في الفترة $(-\infty, 2.5)$،
ومتزايدة في الفترة $(2.5, \infty)$.

عودة لفهرس الفصل (١)

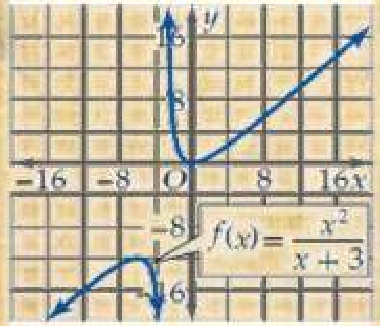
الحل

3



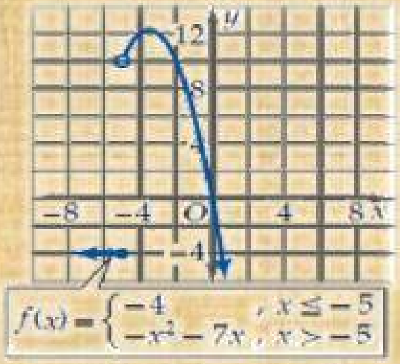
f متزايده في الفترة $(-\infty, 0)$،
ومتزايده في الفترة $(0, \infty)$.

4



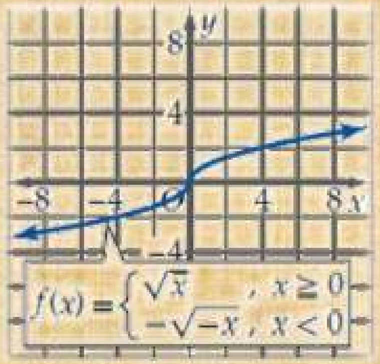
f متزايدة في الفترة $(-\infty, -6)$، ومتناقصة $(-6, -3)$،
ومتناقصة في الفترة $(-3, 0)$، ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

5



f ثابتة في الفترة $(-\infty, -5)$، ومتزايده في الفترة
$(-5, -3.5)$، ومتناقصة في الفترة $(-3.5, \infty)$.

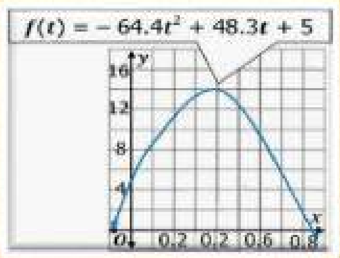
6



f متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

الحل

7 كرة سلة: يعطى ارتفاع كرة سلة $f(t)$ عن سطح الأرض في الرمية الحرة بالدالة $f(t) = -64.4t^2 + 48.3t + 5$، حيث t الزمن بالثواني و $f(t)$ الارتفاع بالأقدام. (مثال 2)

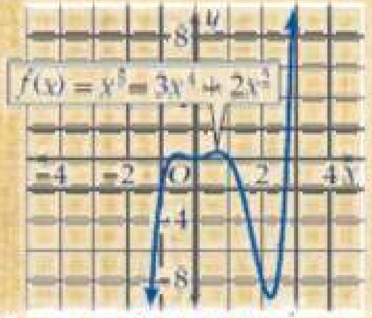


a) مَثِّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد قيمة تقريبية لأعلى ارتفاع تصل إليه الكرة. ثم عزز إجابتك عدديًّا. **14 ft**

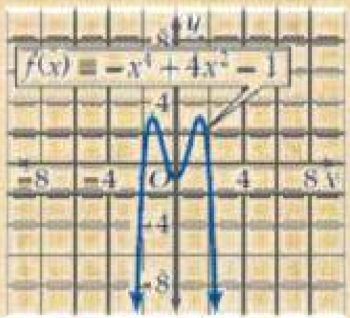
قدِّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقرب إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا. (مثال 2)

8



يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 0.25 عند $x = -0.5, 0.5$، وقيمة صغرى محلية مقدارها 9 − عند $x = 2.5$، ولها قيمة صغرى محلية عند $x=0$ ومقدارها 0.

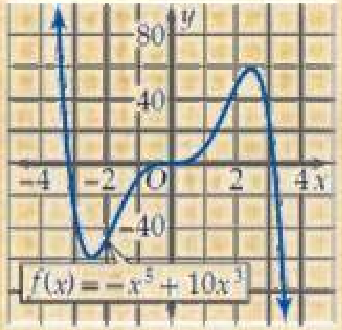
9



واضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 3 عند $x = -1.5, 1.5$، ولها قيمة صغرى محلية مقدارها 1 − عند $x = 0$.

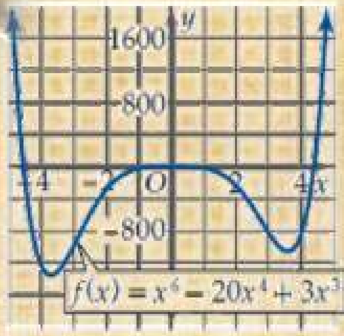
الحل

10



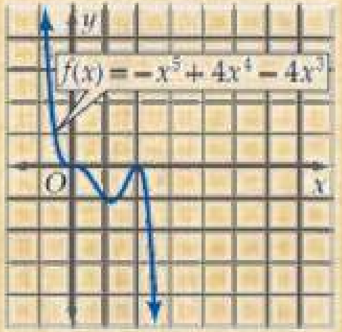
يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -60 عند $x = -2.5$ ، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 60 عند $x = 2.5$.

11



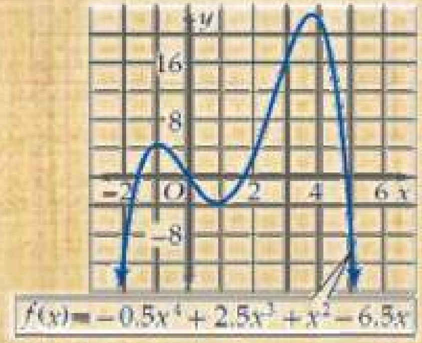
يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -1100 عند $x = 3.5$، ولها قيمة صغرى مطلقة مقدارها -1300 عند $x = -3.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$.

12



يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -1 عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 2$.

13

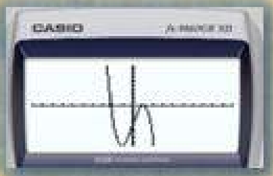


يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -3.5 عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 4.5 عند $x = -1$، ولها قيمة عظمى مطلقة مقدارها 22 عند $x = 4$.

الحل

الحاسبة: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم: (مثال 3)

14 $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$



عظمى محلية عند (1.08, 0.04)؛ وصغرى محلية عند (– 1.08, – 10.04).

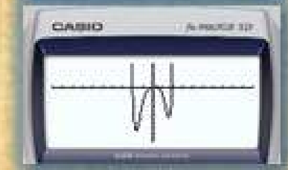
15 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

صغرى مطلقة عند (– 1.38 ،– 7.08).

16 $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

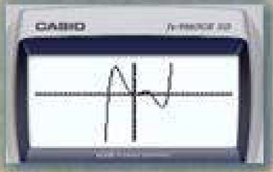
عظمى محلية عند (1.11, 2.12)؛ صغرى محلية عند (– 0.17, – 1.08).

17 $g(x) = x^6 - 4x^4 + x$



عظمى محلية عند (0.41, 0.30)؛ صغرى محلية عند (1.62, – 7.85)؛ صغرى مطلقة عند (– 1.64, – 11.12).

18 $f(x) = 0.008x^5 - 0.05x^4 - 0.2x^3 + 1.2x^2 - 0.7x$



عظمى محلية عند (2.49, 1.45)، (– 3.72, 14.23)؛ صغرى محلية عند (5.90, – 6.83)، (0.32, – 0.11).

19 $f(x) = 0.025x^5 - 0.1x^4 + 0.57x^3 + 1.2x^2 - 3.5x - 2$

عظمى محلية عند (– 1.66, 3.43)؛ صغرى محلية عند (0.93 , – 3.82).

الحل

20 **هندسة:** أوجد كلًا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (مثال 4)

المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
تساوي 20.5π بوصة مربعة

نصف القطر = 2.6 بوصة، الارتفاع = 2.6 بوصة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة. (مثال 5)

21 $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$

28

22 $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1, [5, 9]$

4430

23 $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6, [-1, 5]$

-309

24 $h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9, [3, 6]$

-2550

25 $f(x) = \frac{x-3}{x}, [5, 12]$

0.05

26 $f(x) = \sqrt{x+8}, [-4, 4]$

0.183

الحل

27 طقس: إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة: $f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$ ، حيث x تمثل رقم الشهر، فمثلاً $x = 1$ تمثل شهر يناير، فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين، وبرر إجابتك. (مثال 6)

a) من أبريل إلى مايو

أبريل $(x_1 = 4)$ ، مايو $(x_2 = 5)$: 2.18

b) من يوليو إلى أكتوبر

يوليو $(x_1 = 7)$ ، أكتوبر $(x_2 = 10)$: -2.18

الحل

28 استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:

a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات [5, 15] ، [15, 20] ، [25, 45].

متوسط معدل التغير	الفترة
0.5	[25, 45]
3	[15, 20]
5	[5, 15]

b) قارن بين سرعات الجسم في هذه الفترات الزمنية.

تتزايد سرعة الجسم أو يتسارع الجسم في الفترات الثلاث، وأكبر معدل تسارع للجسم في الفترة [15 , 5] ويبطئ التسارع في الفترة [45 , 25] ، لكن تبقى سرعة الجسم في تزايد.

الحل

29

تكنولوجيا: تبين تقرير بحث في إحدى شركات الحاسوب أن الربح الذي تكسبه الشركة من بيع منتج جديد من الشرائح الإلكترونية يعطى بالدالة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$،
حيث x ثمن بيع الشريحة الواحدة بمئات الريالات، $0 \leq x \leq 6$.

a) مثّل الدالة بيانيًا.

b) أوجد أفضل سعر للشريحة الواحدة والذي يعطي أكبر ربح.

c) أوجد ربح الشريحة الواحدة عند بيعها بالسعر الأفضل.

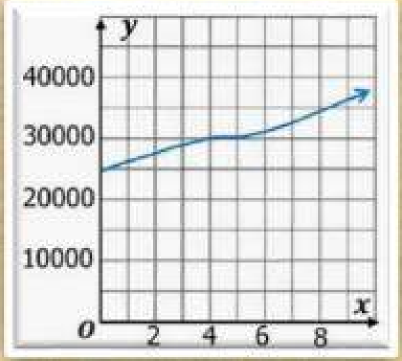
الحل

30 دخل: افرض أن الدخل السنوي (بالريال) لشخص منذ عام 1420هـ وحتى عام 1430 هـ يعطى بالدالة:

$I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362, 0 \leq x \leq 10$ ،

حيث x رقم السنة.

a) مثّل الدالة بيانيًا.



b) أوجد متوسط معدل تغير الدخل من عام 1423 إلى عام 1430 هـ. وماذا تعني قيمة متوسط التغير في هذه الفترة؟

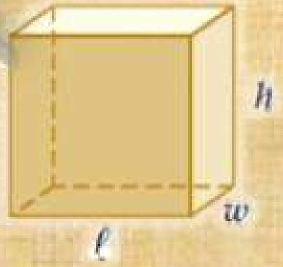
متوسط معدل التغير في دخل الفرد من عام 1420 إلى عام 1430 لهذا الشخص 1280.90ريالا .

c) حدّد السنوات الأربع التي يكون فيها متوسط معدل التغير أكبر ما يمكن، والسنوات الأربع التي يكون فيها أقل ما يمكن.

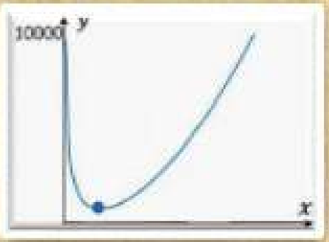
متوسط التغير أقل مايمكن في الفترة من عام 1420 إلى عام 1424 ومقداره 826.43ريالا وكان أعلى ما يمكن في الفترة من عام 1423 إلى عام 1427 ومقداره 1711.44ريال

الحل

31 صندوق: يرغب سالم بعمل صندوق مغلق من الكرتون حجمه 3024 قدمًا مكعبة. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، فأوجد أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن، وضّح إجابتك.

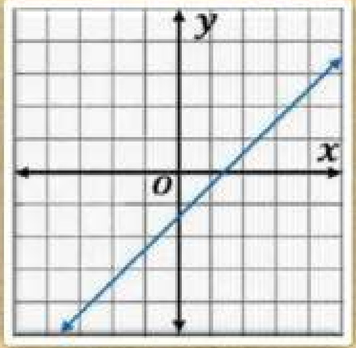


14.5tf × 14.5tf ×14.5 ft؛ إجابة ممكنة : الدالة التي تعطي مساحة السطح الخارجي للصندوق بدلالة طول ضلع القاعدة هي $f(w)=2w^2+\frac{12096}{w}$. يظهر تمثيل الدالة أن القيمة الصغرى المطلقة تكون عندما w =14.5ft.

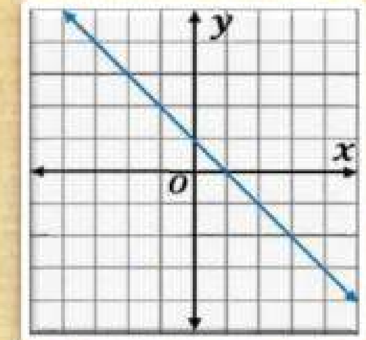


مثل بيانيًا الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

32 $f(x)$ متصلة ومتزايدة.

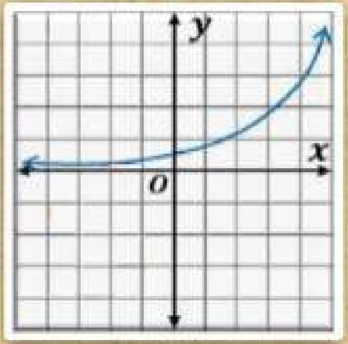


33 $f(x)$ متصلة ومتناقصة.

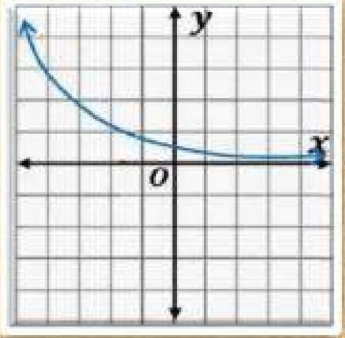


الحل

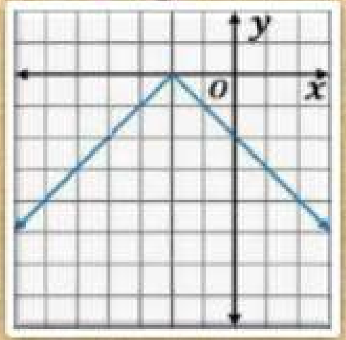
34 $f(x)$ متصلة ومتزايدة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.



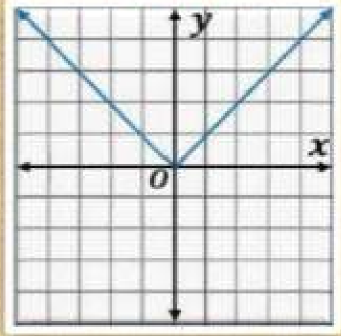
35 $f(x)$ متصلة ومتناقصة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.



36 $f(x)$ متصلة، ومتزايدة لجميع قيم $x < -2$ ،
و متناقصة لجميع قيم $x > -2$.



37 $f(x)$ متصلة، ومتناقصة لجميع قيم $x < 0$،
و متزايدة لجميع قيم $x > 0$.



الحل

حدِّد إحداثيي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت، وبيِّن نوعها:

38) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

صغرى

39) $f(x) = -0.5(x + 5)^2 - 1$

عظمى

40) $f(x) = -4|x - 22| + 65$

عظمى

41) $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$

عظمى

42) $f(x) = x^3 + x$

لا يوجد قيم قصوى

الحل

43

سفر: قام عبد الله بتسجيل المسافة الكلية التي قطعتها عائلته في إحدى الرحلات ومثلها بيانيًا. أعط أسبابًا توضح اختلاف متوسط معدل التغير، ولماذا يكون ثابتًا في فترتين؟

أحد أسباب الاختلاف في متوسط معدل التغير هو أن عبد الله قد واجهته إشارات ضوئية في أثناء مسيره مما أدى إلى نقص في معدل المسافة المقطوعة , وسبب آخر أنه سلك طرقاً فرعية في الساعة الأولى من الرحلة قبل أن يدخل طريقاً سريعاً في الساعات الثلاث اللاحقة .الفترتان اللتان يبدو فيهما أنه لم يتحرك قد تكونان فترتي استراحة أو لتناول الطعام ,وربما كان سبب التوقف وجود حادث أدى إلى توقف حركة السير .

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

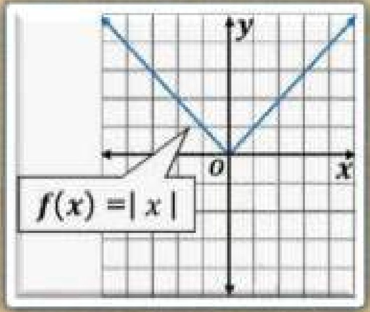
١ _ ٥

تدريب وحل المسائل

الحل

صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x ، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: (مثال ١)

1 $f(x) = [\![x]\!]$

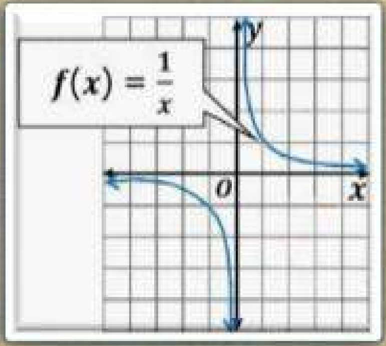


* مجال الدالة $\{x | x \in R\}$، ومداها $\{y | y \geq 0 , y \in R\}$.
* للمنحنى مقطع واحد عند (0 , 0).
* منحنى الدالة متماثل حول y؛ لذا فالدالة زوجية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* يبدأ المنحنى عند $x = 0$. وينتهي بـ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.
* المنحنى متناقص في الفترة (0, ∞-)، ومتزايد في الفترة (∞ , 0).

عودة لفهرس الفصل (١)

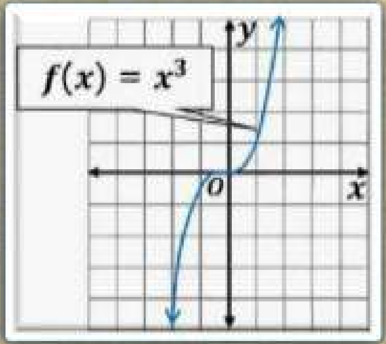
الحل

2 $f(x)=\frac{1}{x}$



* مجال الدالة $\{x|x\neq 0, x\in R\}$، ومداها $\{y|y\neq 0, y\in R\}$.
* المنحنى لا يقطع أياً من المحورين.
* منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية.
* للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x=0$.
* $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$
* الدالة متناقصة في الفترة $(0,\infty)$ ، $(-\infty,0)$

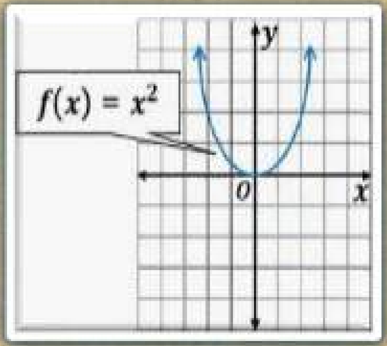
3 $f(x)=x^3$



* مجال الدالة $\{x\mid x\in R\}$، ومداها $\{y\mid y\in R\}$.
* يقطع المنحنى المحورين عند النقطة $(0,0)$.
* المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فهي دالة فردية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
* المنحنى متزايد على الفترة $(-\infty,\infty)$

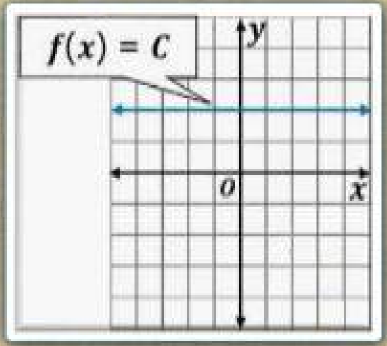
الحل

4 $f(x) = x^2$



* مجال الدالة $\{ x \mid x \in R \}$، ومداها $\{ y \mid y \geq 0 , y \in R \}$،
* يقطع المنحنى المحورين عند النقطة $(0 , 0)$.
* المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فهي دالة زوجية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
* المنحنى متناقص على الفترة $(-\infty , 0)$، ومتزايد على الفترة $(0 , \infty)$.

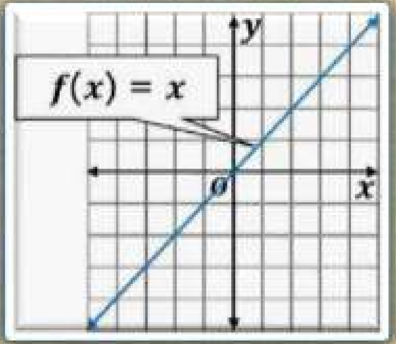
5 $f(x) = c$



* مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية، ومداها $\{ C \}$.
* يقطع المنحنى محور y عند النقطة $(0 , C)$، وإذا كان $C = 0$ فيقطع المنحنى المحور x عند عدد لا نهائي من النقاط.
* المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فهي دالة زوجية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$
* المنحنى ثابت في الفترة $(-\infty , \infty)$

الحل

6 $f(x) = x$

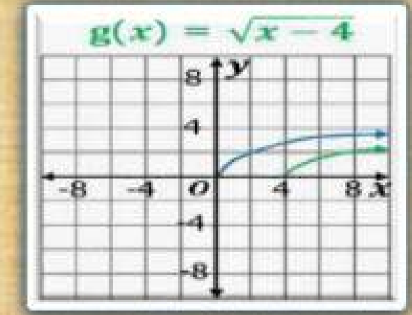


* مجال الدالة $\{ x \mid x \in R \}$، ومداها $\{ y \mid y \in R \}$،
* يقطع المنحنى المحورين عند النقطة (0 , 0).
* المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فهي دالة فردية.
* المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
* $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
* المنحنى متزايد على الفترة $(-\infty , \infty)$

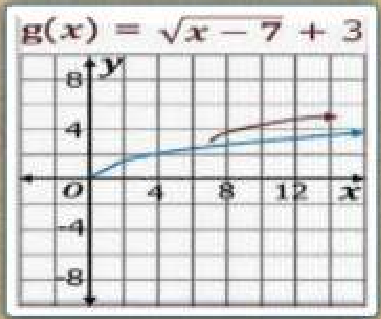
الحل

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

7 $g(x) = \sqrt{x-4}$

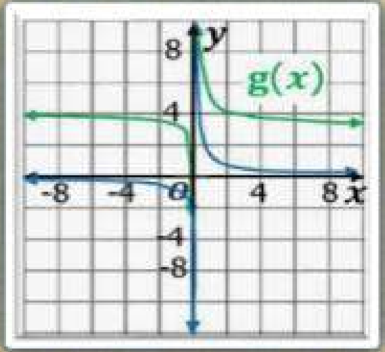


8 $g(x) = \sqrt{x-7} + 3$

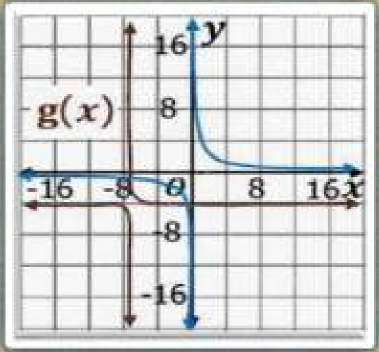


استعمل الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \frac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2)

9 $g(x) = \frac{1}{x} + 4$



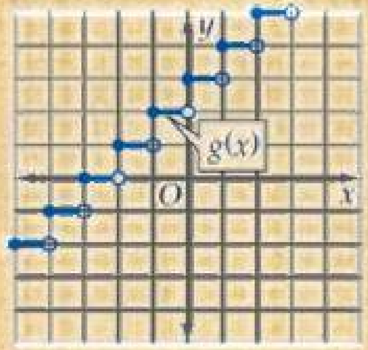
10 $g(x) = \frac{1}{x+7} - 4$



الحل

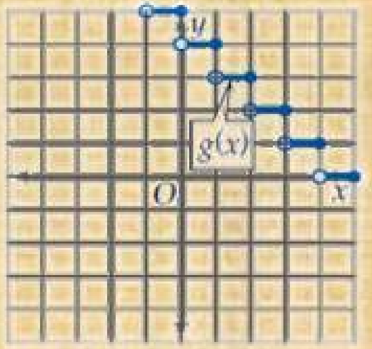
صف العلاقة بين منحنى $f(x) = [\![x]\!]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3)

11



منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار $g(x) = [\![x + 3]\!]$.

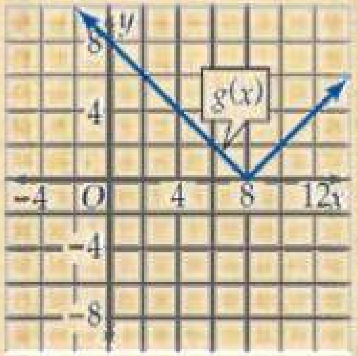
12



منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ بانعكاس حول المحور y, يتبعه انسحاب مقداره 4 وحدات إلى اليمين : $g(x) = -[\![x - 4]\!]$

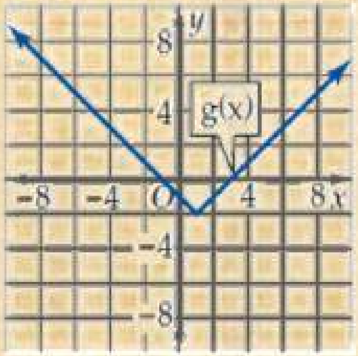
صف العلاقة بين منحنى $f(x) = |x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$: (مثال 3)

13



منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليمين: $g(x)=|x - 8|$.

14

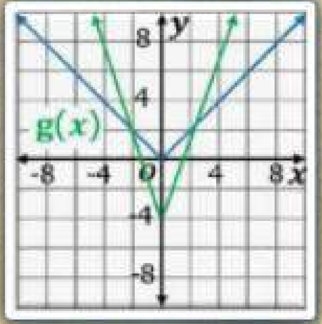


منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره وحدة واحدة إلى اليمين و وحدتان إلى الأسفل: $g(x)=|x - 1| - 2$.

الحل

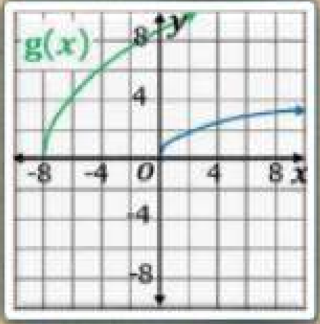
اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما في مستوى إحداثي واحد. (مثال 4)

15 $g(x) = 3|x| - 4$



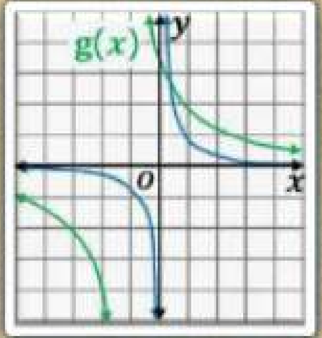
$f(x)=|x|$: منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي يتبعه انسحاب بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل للدالة $f(x)$.

16 $g(x) = 3\sqrt{x + 8}$



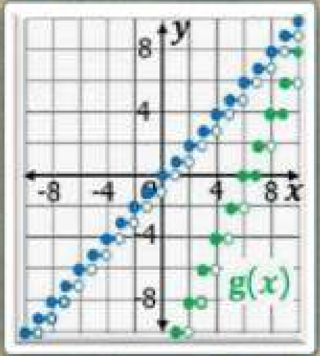
$f(x)=\sqrt{x}$: منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي يتبعه انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.

17 $g(x) = \frac{4}{x + 1}$



$f(x)=\frac{1}{x}$: منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي يتبعه انسحاب بمقداره وحدة وحداة إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.

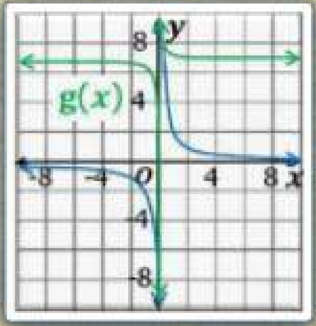
18 $g(x) = 2[\![x - 6]\!]$



$f(x)$ $[\![x]\!]$: منحنى $g(x)$ هو انعكاس حول المحور y, ثم توسع رأسي و انسحاب مقداره وحدتان الى اليمن لمنحنى $f(x)$.

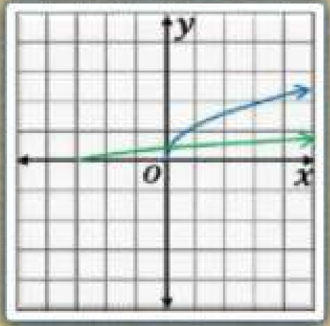
الحل

19 $g(x) = \frac{1}{6x} + 7$



$f(x)=\frac{1}{x}$: منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي يتبعه انسحاب مقداره 7 وحدات إلى الأعلى لمنحنى $f(x)$.

20 $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{4}$



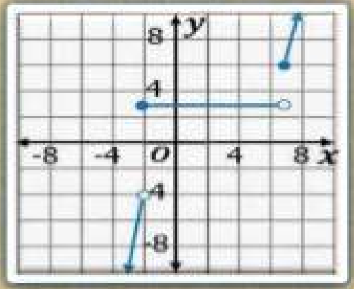
$f(x)=\sqrt{x}$: منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي يتبعه انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.

الحل

مثّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانياً: (مثال 5)

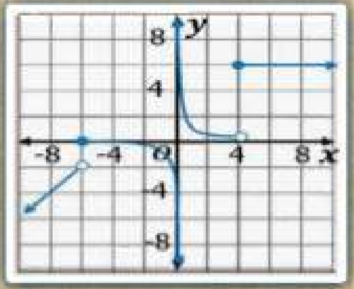
21

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < -2 \\ 3 & , \quad -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 & , \quad x \ge 7 \end{cases}$$



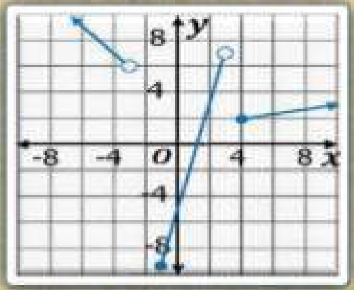
22

$$g(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x < -6 \\ \frac{1}{x} & , \quad -6 \le x < 4 \\ 6 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$



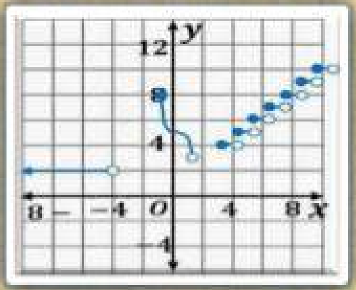
23

$$h(x) = \begin{cases} |x-5| & , \quad x < -3 \\ 4x - 3 & , \quad -1 \le x < 3 \\ \sqrt{x} & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$



24

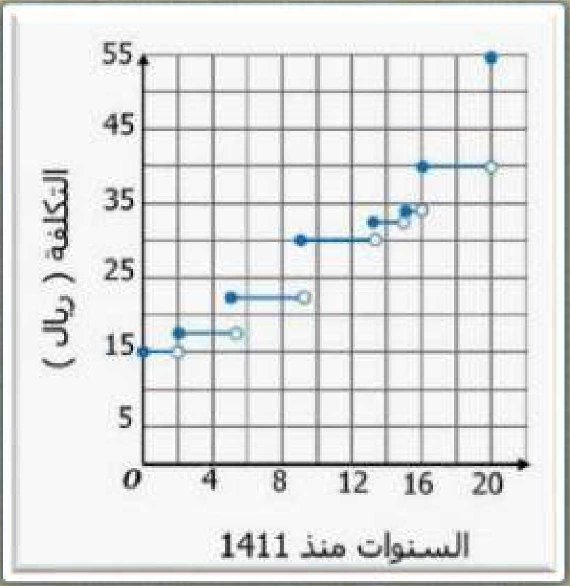
$$g(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x < -4 \\ x^4 - 3x^3 + 5 & , \quad -1 \le x < 1 \\ [\![x]\!] + 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$



الحل

25 أسعار: يبين الجدول أدناه سعر سلعة منذ سنة 1411هـ حتى 1431هـ
استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية. (مثال 5)

السنة	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55



الحل

26 **أعمال:** قدمت إحدى شركات الهواتف المحمولة عرضًا لمشتركي شبكتها بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًا مقداره 20 ريالًا، ويدفع 0.2 ريال مقابل كل دقيقة اتصال. إن تكلفة هذا العرض على المشترك تعطى بالدالة $c(x) = 20 + 0.2 [\![x]\!]$، حيث x عدد دقائق الاتصال. (مثال 6)

a) صف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = [\![x]\!]$ لتمثيل الدالة $c(x)$.

منحنى $c(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، يتبعه انسحاب مقداره 20.

b) إذا قدمت الشركة عرضًا آخر بحيث يدفع المشترك فيه 30 ريالًا شهريًا، ويدفع 0.1 ريال عن كل دقيقة اتصال. فاكتب الدالة التي تصف تكلفة هذا العرض.

$c(x) = 30 + 0.1 [\![x]\!]$

c) هل يمكن أن تتساوى التكلفة في العرضين؟ وكم يكون عدد دقائق الاتصال في هذه الحالة؟

نعم، بعد 100 دقيقة.

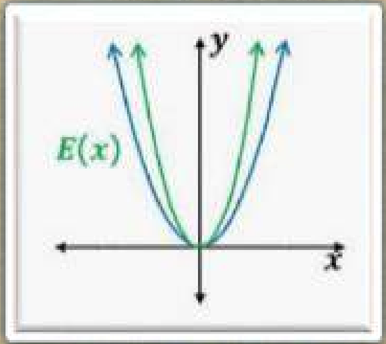
الحل

27 فيزياء: إذا علمت أن الطاقة المختزنة في نابض ما، تعطى بالدالة $E(x) = 4x^2$ حيث تقاس الطاقة E بالجول، وتقاس المسافة x بالمتر. (مثال 6)

a) صف التحويل الهندسي الذي تم على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على الدالة $E(x)$.

توسع رأسي.

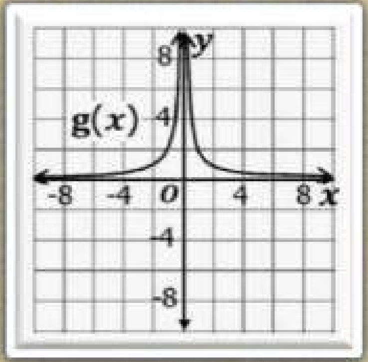
b) إذا كانت الطاقة المختزنة في نابض ما، آخر تعطى بالدالة $E(x) = 2x^2$، فمثّل بيانيًا كلًا من الدالتين على الشاشة نفسها باستعمال الحاسبة البيانية.

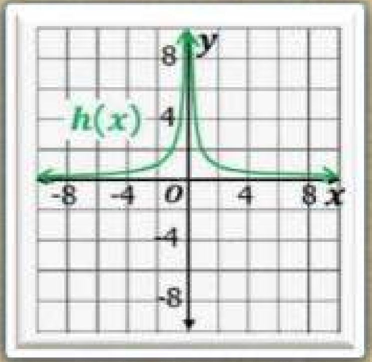


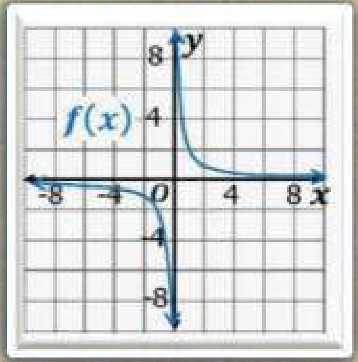
الحل

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين $h(x) = f(|x|)$, $g(x) = |f(x)|$ بيانيًا: (مثال 7)

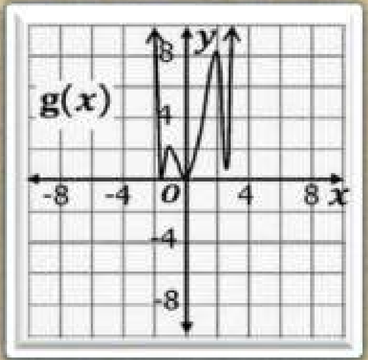
28 $f(x) = \frac{2}{x}$

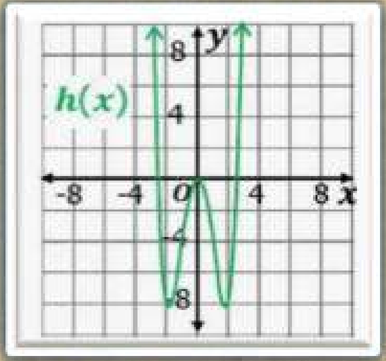


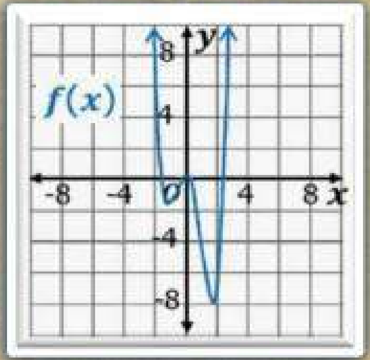




29 $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$

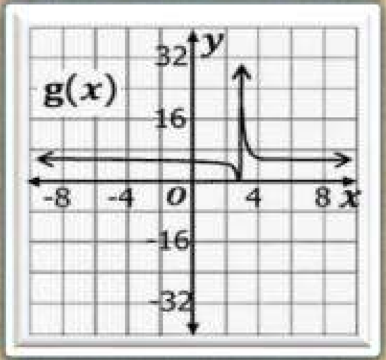


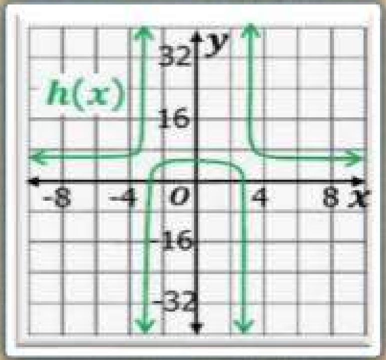


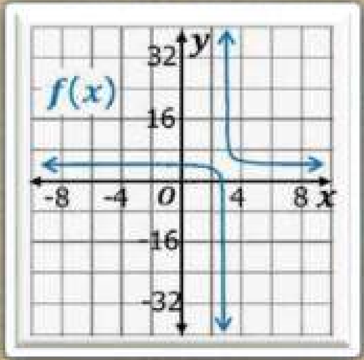


الحل

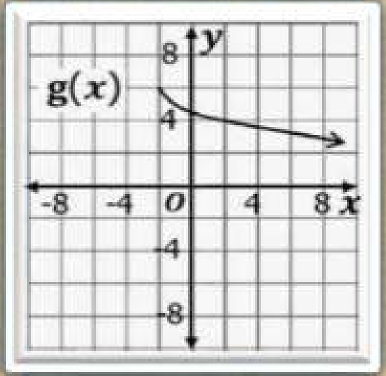
30 $f(x) = \frac{1}{x-3} + 5$

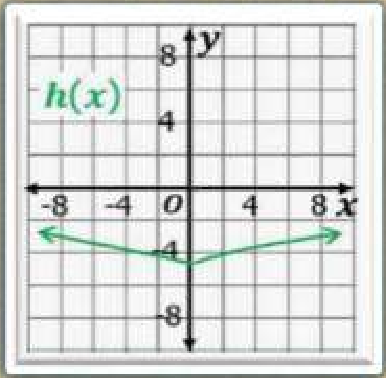


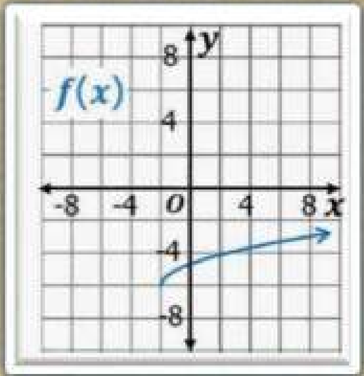




31 $f(x) = \sqrt{x+2} - 6$







الحل

اكتب الدالة الناتجة من إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسة (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

32 $f(x) = \frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى الأعلى، و 7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معامله 2.

$$g(x) = \frac{2}{x+7} + 5$$

33 $f(x) = [\![x]\!]$: انعكاس في المحور x و انسحاب 4 وحدات إلى الأسفل، وتوسع رأسي معامله 3.

$$g(x) = -3[\![x]\!] - 4$$

الحل

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم تعطى بالدالة $g(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ حيث x_0 المسافة الابتدائية، و v_0 السرعة الابتدائية و a تسارع الجسم. صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(t) = t^2$ للحصول على $g(t)$ في كل مما يأتي:

34 $x_0 = 0, v_0 = 2, a = 2$

انسحاب بمقدار وحدة واحده إلى اليسار و وحدة واحدة إلى الأسفل.

35 $x_0 = 10, v_0 = 0, a = 2$

انسحاب بمقدار 10 وحدات إلى الأعلى .

36 $x_0 = 1, v_0 = 8, a = 4$

توسع رأسي ,يتبعه انسحاب مقداره وحدتان إلى اليسار ثم انسحاب مقداره 7 وحدات إلى الأسفل .

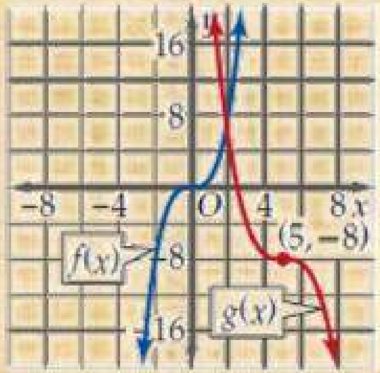
37 $x_0 = 3, v_0 = 5, a = 3$

توسع رأسي ,يتبعه انسحاب مقداره $\frac{5}{3}$ وحدة إلى اليسار, ثم انسحاب مقداره $\frac{7}{6}$ وحداة إلى الأسفل .

الحل

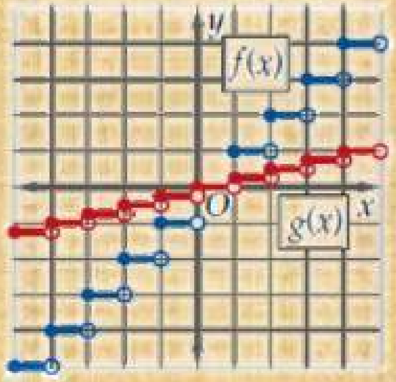
اكتب معادلة $g(x)$ في كل مما يأتي:

38



$g(x) = -0.5(x-5)^3 - 8$

39



$g(x) = \frac{1}{4}[\![x+8]\!] - 2$

40

تسوق: توقعت إدارة أحد المجمعات التجارية الجديدة أن يعطي عدد المتسوقين بالآلاف بالدالة $f(x) = \sqrt{7x}$ خلال أول ستين يومًا من الافتتاح، حيث x رقم اليوم بعد الافتتاح.
$x = 1$ يرتبط بيوم الافتتاح. اكتب دالة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ لكل حالة من الحالات الآتية:

a) زاد عدد الحضور 12% على المتوقع. $g(x) = 1.12\sqrt{7x}$

b) تأخر موعد الافتتاح 30 يومًا بسبب تأخر أعمال البناء. $g(x) = \sqrt{7(x-30)}$

c) نقص عدد المتسوقين 450 عن المتوقع. $g(x) = \sqrt{7x} - 0.45$

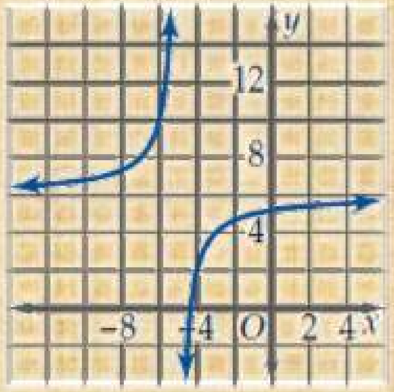
الحل

اكتب دالة تمثل المنحنى في كل مما يأتي :

41

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-6)^3 + 2$$

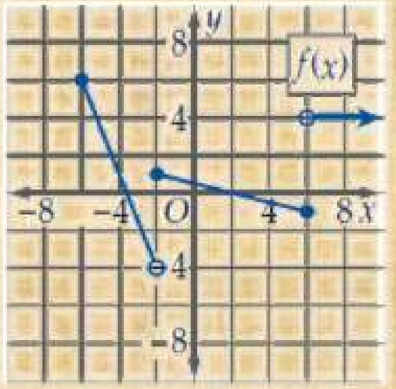
42



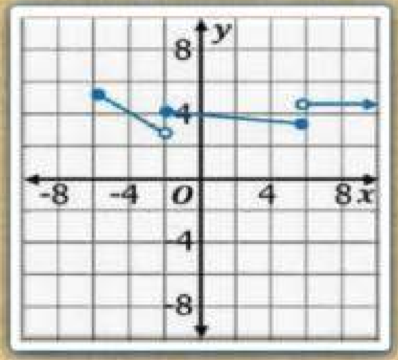
$$f(x) = -\frac{4}{x+5} + 6$$

الحل

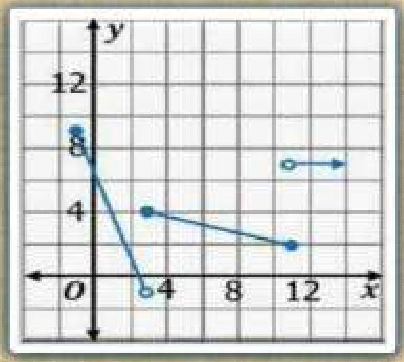
استعمل منحنى $f(x)$ لتمثيل منحنى $g(x)$ لكل مما يأتي:



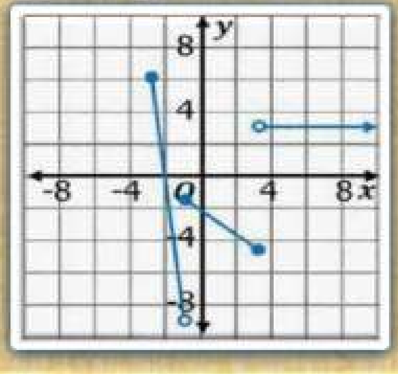
43 $g(x) = 0.25f(x) + 4$



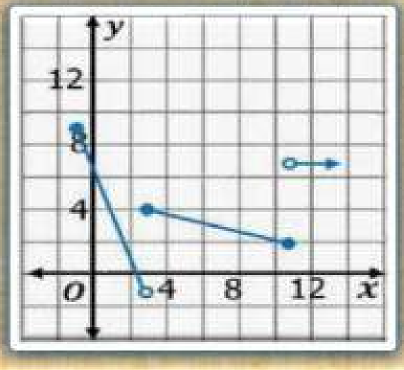
44 $g(x) = 3f(x) - 6$



45 $g(x) = f(x - 5) + 3$



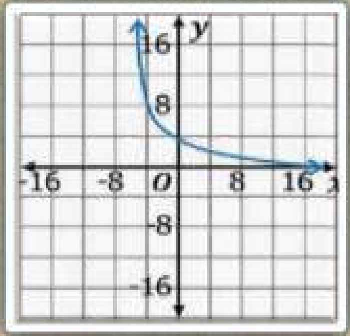
46 $g(x) = -2f(x) + 1$



الحل

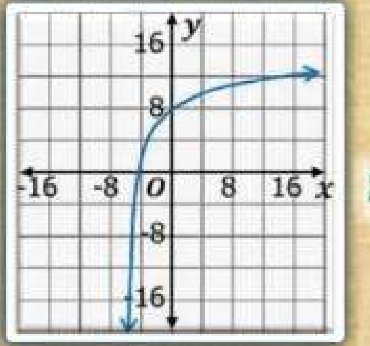
استعمل $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة مما يأتي:

47 $g(x) = 2f(x) + 5$



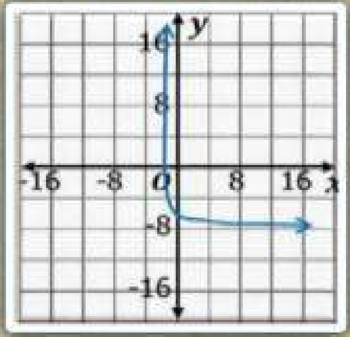
$g(x) = \frac{16}{\sqrt{x+6}} - 3$

48 $g(x) = -3f(x) + 6$



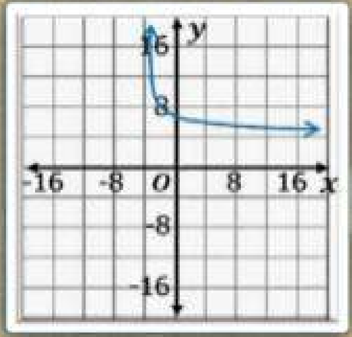
$g(x) = \frac{-24}{\sqrt{x+6}} + 18$

49 $g(x) = f(4x) - 5$



$g(x) = \frac{8}{\sqrt{4x+6}} - 9$

50 $g(x) = f(2x + 1) + 8$



$g(x) = \frac{8}{\sqrt{2x+7}} + 4$

الحل

51 تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة بعض العمليات على الدوال معتمدًا على الدوال الآتية:

- $f(x) = x^2 + 2x + 7$
- $g(x) = 4x + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10$

a) **جدوليًا:** اختر ثلاث قيم لـ a وأكمل الجدول الآتي:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$
3	22	15	37	37
-4	15	-13	2	2
15	262	63	325	325

b) **لفظيًا:** ما العلاقة بين $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$؟

$h(x)$ تساوي ناتج جمع $f(x)$ و $g(x)$.

c) **جبريًا:** أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها في الفرع b جبريًا.

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

$$x^2 + 2x + 7 + 4x + 3 = x^2 + 6x + 10$$

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

١-٦

تدريب وحل المسائل

الحل

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f \bullet g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f + g)(x)$ للدالتين $g(x)$, $f(x)$. في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (مثال 1)

1

$f(x) = x^2 + 4$

$g(x) = \sqrt{x}$

		المجال
$(f + g)(x) =$	$x^2 + \sqrt{x} + 4$	$\{x \mid x \geq 0 , x \in R\}$
$(f - g)(x) =$	$x^2 - \sqrt{x} + 4$	
$(f \cdot g)(x) =$	$x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$	
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{-1}{2}}$	$\{x \mid x > 0 , x \in R\}$

2

$f(x) = 8 - x^3$

$g(x) = x - 3$

		المجال
$(f + g)(x) =$	$-x^3 + x + 5$	$\{x \mid x \in R\}$
$(f - g)(x) =$	$-x^3 - x + 11$	
$(f \cdot g)(x) =$	$-x^4 + 3x^3 + 8x - 24$	
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{8 - x^3}{x - 3}$	$\{x \mid x \neq 3 , x \in R\}$

عودة لفهرس الفصل (١)

الحل

3

$f(x) = x^2 + 5x + 6$

$g(x) = x + 2$

$(f+g)(x) =$	$x^2 + 6x + 8$	$\{x \mid x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$x^2 + 4x + 4$		
$(f \cdot g)(x) =$	$x^3 + 7x^2 + 16x + 12$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$x + 3$	$\{x \mid x \neq -2 , x \in R\}$	

4

$f(x) = x^2 + x$

$g(x) = 9x$

$(f+g)(x) =$	$x^2 + 10x$	$\{x \mid x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$x^2 - 8x$		
$(f \cdot g)(x) =$	$9x^3 + 9x^2$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{x+1}{9}$	$\{x \mid x \neq 0 , x \in R\}$	

5

$f(x) = x - 7$

$g(x) = x + 7$

$(f+g)(x) =$	$2x$	$\{x \mid x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	-14		
$(f \cdot g)(x) =$	$x^2 - 49$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{x-7}{x+7}$	$\{x \mid x \neq -7 , x \in R\}$	

6

$f(x) = \frac{6}{x}$

$g(x) = x^3 + x$

$(f+g)(x) =$	$x^3 + x + \frac{6}{x}$	$\{x \mid x \neq 0 , \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$-x^3 - x + \frac{6}{x}$		
$(f \cdot g)(x) =$	$6x^2 + 6$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{6}{x^4 + x^2}$		

الحل

7

$f(x) = \frac{x}{4}$

$g(x) = \frac{3}{x}$

$(f+g)(x) =$	$\frac{x^2+12}{4x}$	$\{x \mid x \neq 0 \,,\, \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$\frac{x^2-12}{4x}$		
$(f \cdot g)(x) =$	$\frac{3}{4}$		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{x^2}{12}$		

8

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$g(x) = 4\sqrt{x}$

$(f+g)(x) =$	$\frac{1}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}$	$\{x \mid x > 0 \,,\, x \in R\}$	المجال
$(f-g)(x) =$	$\frac{1}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$		
$(f \cdot g)(x) =$	4		
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{1}{4x}$		

9

$f(x) = \sqrt{x+8}$

$g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

$(f+g)(x) =$	$\sqrt{x+8} + \sqrt{x+5} - 3$
$\{x \mid x \geq -5 \,,\, x \in R\}$	
$(f-g)(x) =$	$\sqrt{x+8} - \sqrt{x+5} + 3$
$\{x \mid x \geq -5 \,,\, x \in R\}$	
$(f \cdot g)(x) =$	$\sqrt{x^2+13x+40} - 3\sqrt{x+8}$
$\{x \mid x \geq -5 \,,\, x \in R\}$	
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+5} - 3}$
$\{x \mid x \geq -5 \,,\, x \neq 4 \,,\, x \in R\}$	

10

$f(x) = \sqrt{x+6}$

$g(x) = \sqrt{x-4}$

$(f+g)(x) =$	$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-4}$
$\{x \mid x \geq 4 \,,\, x \in R\}$	
$(f-g)(x) =$	$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-4}$
$\{x \mid x \geq 4 \,,\, x \in R\}$	
$(f \cdot g)(x) =$	$\sqrt{x^2+2x-24}$
$\{x \mid x \geq 4 \,,\, x \in R\}$	
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-4}}$
$\{x \mid x > 4 \,,\, x \in R\}$	

الحل

أوجد $[f \circ g](6)$ ، $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية. (مثال 2)

11

$f(x) = 2x - 3$
$g(x) = 4x - 8$

$[g \circ f](x) =$	$8x - 20$
$[f \circ g](x) =$	$8x - 19$
$[f \circ g](6) =$	29

12

$f(x) = -2x^2 - 5x + 1$
$g(x) = -5x + 6$

$[g \circ f](x) =$	$10x^2 + 25x + 1$
$[f \circ g](x) =$	$-50x^2 + 145x - 101$
$[f \circ g](6) =$	-1031

13

$f(x) = x^2 - 16$
$g(x) = x^2 + 7x + 11$

$[g \circ f](x) =$	$x^4 - 25x^2 + 155$
$[f \circ g](x) =$	$x^4 + 14x^3 + 71x^2 + 145x + 105$
$[f \circ g](6) =$	7905

14

$f(x) = 2 + x^4$
$g(x) = -x^2$

$[g \circ f](x) =$	$-x^8 - 4x^4 - 4$
$[f \circ g](x) =$	$2 + x^8$
$[f \circ g](6) =$	1679618

الحل

حدِّد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية: (مثال 3)

15

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$g(x) = x^2 - 4$$

$(f \circ g)(x) =$	$\frac{1}{x^2-3}$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x \neq \pm\sqrt{3}, x \in R\}$

16

$$f(x) = \frac{2}{x-3}$$

$$g(x) = x^2 + 6$$

$(f \circ g)(x) =$	$\frac{2}{x^2+3}$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x \in R\}$

17

$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

$$g(x) = x^2 - 4$$

$(f \circ g)(x) =$	x
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x \in R\}$

18

$$f(x) = \frac{5}{x}$$

$$g(x) = \sqrt{6-x}$$

$(f \circ g)(x) =$	$\frac{5}{\sqrt{6-x}}$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x < 6, x \in R\}$

19

$$f(x) = -\frac{4}{x}$$

$$g(x) = \sqrt{x+8}$$

$(f \circ g)(x) =$	$\frac{-4}{\sqrt{x+8}}$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x > -8, x \in R\}$

20

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

$$g(x) = x^2 + 4x - 1$$

$(f \circ g)(x) =$	$x + 2$
مجال $f \circ g$	$\{x \mid x \in R\}$

الحل

21 النظرية النسبية، في النظرية النسبية $m(v) = \dfrac{100}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$،

حيث c سرعة الضوء وتساوي 300 مليون متر في الثانية و m كتلة جسم يسير بسرعة v متر في الثانية وكتلته الأصلية 100 kg. (مثال 4)

a) هل توجد قيود على مجال الدالة m؟ برر إجابتك.

مجال الدالة هو $\{v \mid 0 \le v < c, v \in R\}$؛ قيود الدالة هي لا يمكن أن تكون سرعة الجسم مساوية لسرعة الضوء؛ لأنك تحصل على $\frac{100}{0}$، وهي كمية غير معرفه. كذلك لا تكون v أكبر من c؛ لأنك تحصل على عدد سالب تحت الجذر التربيعي، وهذه كمية غير معرفه، وأخيرا لا تكون السرعة أقل من صفر؛ لأن السرعة ليست سالبة.

b) أوجد $m(10), m(10000), m(1000000)$.

$m(10) =$	$100kg$
$m(10000) \approx$	$100.0000001kg$
$m(1000000) \approx$	$100.0005556kg$

c) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $m(v)$ عندما تصبح v كبيرة جدًا.

عندما تزداد قيمة v تؤول $m(v)$ الى ∞

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

$m(v) = f(g(v))$

$g(v) = \frac{v}{c}$ ، $f(v) = \frac{100}{\sqrt{1 - v^2}}$

الحل

أوجد دالتين f و g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$. (مثال 4)

22 $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

$f(x) = \sqrt{x} + 7 \quad ; g(x) = 4x + 2$

23 $h(x) = \frac{6}{x+5} - 8$

$f(x) = \frac{6}{x} - 8 \quad ; g(x) = x + 5$

24 $h(x) = |4x + 8| - 9$

$f(x) = |x| - 9 \quad ; g(x) = 4x + 8$

25 $h(x) = [\![-3(x-9)]\!]$

$f(x) = [\![-3x]\!] \quad ; g(x) = x - 9$

26 $h(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$

$f(x) = \sqrt{x} \quad ; g(x) = \frac{5-x}{x+2}$

27 $h(x) = (\sqrt{x} + 4)^3$

$f(x) = x^3 \quad ; g(x) = \sqrt{x} + 4$

28 $h(x) = \frac{8}{(x-5)^2}$

$f(x) = \frac{8}{x^2} \quad ; g(x) = x - 5$

29 $h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-6} \quad ; g(x) = x + 4$

الحل

30 ميكانيكا الكم: يُعطى طول الموجة λ لجسم كتلته m kg، ويتحرك بسرعة v متر في الثانية بالدالة $\lambda = \frac{h}{mv}$، حيث h ثابت يساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$.

a) أوجد دالة تمثّل طول الموجة لجسم كتلته 25kg بدلالة سرعته.

$$f(v)= \frac{h}{25v}$$

b) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ برر إجابتك.

قيمة v ليست صفراً. وإذا كانت كذلك,فلا يوجد طول موجه.

c) إذا تحرك الجسم بسرعة 8 أمتار في الثانية، فأوجد طول الموجة بدلالة h.

$$\lambda = \frac{h}{(25)(8)}$$

d) اكتب الدالة في الفقرة a على صورة تركيب دالتين.

$$f(v)=a[b(v)]= \frac{h}{25v} \quad , b(v)=25v \quad , a(v)= \frac{h}{v}$$

الحل

31 وظائف: يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال. افرض أن $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$. (مثال 5)

a) إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال، فهل تُمثّل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$؟ برر إجابتك.

$h[f(x)]$؛ تحسب العمولة بعد طرح الحد الأدنى المطلوب من المبيعات الفعلية.

b) أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة.

6000 ريال

الحل

أوجد دالتين f, g لكلٍّ مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أي من الدالتين الدالة المحايدة $I(x) = x$.

32 $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

; $g(x) = \sqrt{x-1}$

$f(x) = x - \frac{4}{x^2+1}$

33 $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

; $g(x) = -7x$

$f(x) = \sqrt{x} - \frac{9x}{7}$

34 $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

; $g(x) = x + 4$

$f(x) = \frac{x-4}{2x-9} + \sqrt{\frac{4}{x-4}}$

35 $h(x) = \frac{x^2-4}{x} + \frac{3x-5}{5x}$

; $g(x) = x + 2$

$f(x) = \frac{x^2-4x}{x-2} + \frac{3x-11}{5x-10}$

الحل

أوجد $f(0.5)$, $f(-6)$, $f(x+1)$ في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك:

36 $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6, g(x) = x + 4$

$f(0.5) =$	-0.75
$f(-6) =$	22
$f(x+1) =$	$x^2 + 4x + 1$

37 $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}, g(x) = 2x$

$f(0.5) =$	8.7
$f(-6) =$	11.6
$f(x+1) =$	$\frac{2}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1} - 2x - \frac{7}{3}$

38 $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x}, g(x) = \sqrt{1-x}$

$f(0.5) =$	2.4
$f(-6) =$	650.9
$f(x+1) =$	$\sqrt{-x} + 18x^2 + 36x + 18 - \frac{\sqrt{2}}{x+1}$

الحل

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ لكل مما يأتي:

39

$f(x) = x + 8$

$g(x) = x^2 - 6$

$h(x) = \sqrt{x} + 3$

$[f \circ g \circ h](x) = x + 6\sqrt{x} + 11$

40

$f(x) = \sqrt{x + 5}$

$g(x) = x^2 - 3$

$h(x) = \frac{1}{x}$

$[f \circ g \circ h](x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2}$

41 إذا كانت $f(x) = x + 2$ ، فأوجد $g(x)$ في كل حالة مما يأتي:

a) $(f + g)(x) = x^2 + x + 6$

$g(x) = x^2 + 4$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$

$g(x) = 4x + 8$

الحل

42 إذا كانت $f(x) = \sqrt{4x}$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \circ g](x) = |6x|$

$$g(x) = 9x^2$$

b) $[g \circ f](x) = 200x + 25$

$$g(x) = 50x^2 + 25$$

43 إذا كان $f(x) = 4x^2$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \cdot g](x) = x$

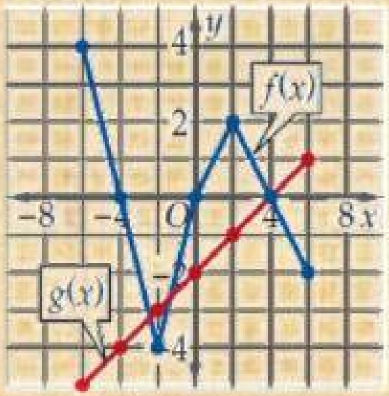
$$g(x) = \frac{1}{4x}$$

b) $[f \cdot g](x) = 4x$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

الحل

باستعمال منحنيي الدالتين $g(x)$, $f(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:



44 $(f+g)(2)$

$= 1$

45 $(f-g)(-6)$

9

46 $(f \cdot g)(4)$

0

47 $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

$\frac{4}{3}$

48 $(f \circ g)(-4)$

0

49 $(g \circ f)(6)$

-3

الحل

50 كيمياء: إذا كان $v(m)$ معدل سرعة جزيئات غاز عند درجة $30°C$ بالمتر لكل ثانية تُعطى بالدالة $v(m)=\sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$، حيث m الكتلة المولية للغاز مقاسة بالكيلوجرام لكل مول.

a) هل توجد قيود على مجال الدالة؟فسر معناها.

$$\{m \mid m > 0, m \in R\}$$

b) أوجد معدل سرعة جزيئات الغاز إذا كانت كتلته المولية 145 كيلوجرامًا لكل مول عند درجة $30°C$.

$$v(145)=\sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{145}}=7.22\ m/s$$

c) كيف يتغير معدل سرعة جزيئات غاز عندما تزداد كتلة الغاز المولية؟

تتناقص سرعتها.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

$$v(m)=f(g(m))$$

$$g(m)=\frac{(24.9435)(303)}{145}\quad , f(m)=\sqrt{m}$$

الحل

أوجد ثلاث دوال f, g, h، بحيث يكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$ في كلٍّ مما يأتي:

51 $a(x) = (\sqrt{x-7} + 4)^2$

$f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x} + 4$,

$h(x) = x - 7$

52 $a(x) = \sqrt{(x-5)^2 + 8}$

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 8$,

$h(x) = x - 5$

53 $a(x) = \dfrac{3}{(x-3)^2 + 4}$

$f(x) = \dfrac{3}{x}$, $g(x) = x^2 + 4$,

$h(x) = x - 3$

54 $a(x) = \dfrac{4}{(\sqrt{x} + 3)^2 + 1}$

$f(x) = \dfrac{4}{x+1}$, $g(x) = x^2$,

$h(x) = \sqrt{x} + 3$

الحل

أوجد $f \circ g$ ، $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، وحدّد أية قيود على مجال دالة التركيب في كل حالة:

55

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

$g(x) = \sqrt{x+4} + 3$

$\{x \mid x \geq -4, x \in R\}$,

$[f \circ g](x) = [g \circ f] = x$

56

$f(x) = \sqrt{x+6}$

$g(x) = \sqrt{16 + x^2}$

57

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

58

$f(x) = \dfrac{6}{2x+1}$

$g(x) = \dfrac{4}{4-x}$

الحل

59 تمثيلات متعددة: في هذه المسألة سوف تستقصي الدالة العكسية.

$f(x)$	$g(x)$
$x+3$	$x-3$
$4x$	$\frac{x}{4}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$

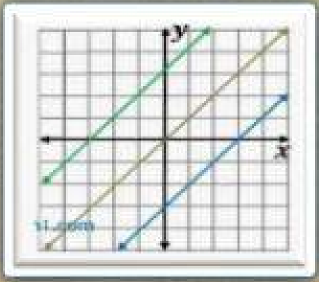
a) **جبريًا:** أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في الجدول المجاور.

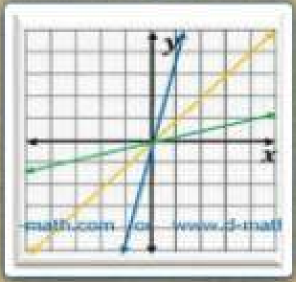
لكل دالة منها $[f \circ g](x) = x$

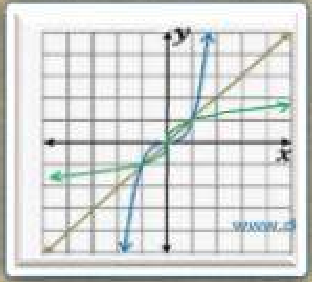
b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

لكل زوج من الدوال تختصر الأعداد بعضها مع بعض على ألا يكون للتركيب أية معاملات غير الواحد ولا يبقى ثوابت.

c) **بيانيًا:** مثّل كل زوج من الدوال في المستوى الإحداثي نفسه، ثم ارسم خط الانعكاس بإيجاد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.







d) **لفظيًا:** خمّن معادلة خط الانعكاس. محور الانعكاس بين كل زوج من الدوال هو المستقيم $y=x$.

e) **تحليليًا:** ما الدالة الرئيسة (الأم) التي تساوي كل من $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$؟ الدالة المحايدة.

f) **تحليليًا:** أوجد $g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ في كلٍّ مما يأتي.

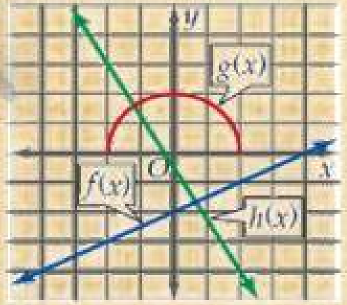
a) $f(x) = x - 6$ $g(x) = x + 6$

b) $f(x) = \frac{x}{3}$ $g(x) = 3x$

c) $f(x) = x^5$ $g(x) = \sqrt[5]{x}$

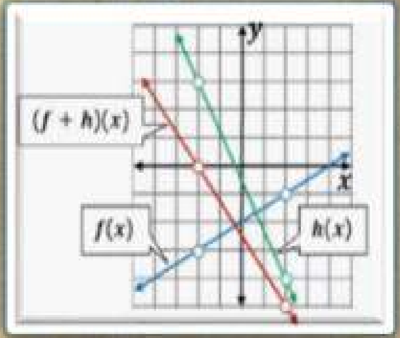
d) $f(x) = 2x - 3$ $g(x) = \frac{x+3}{2}$

الحل

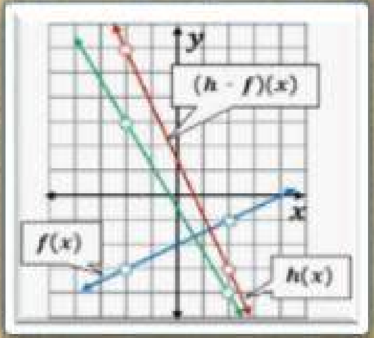


مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًا باستعمال الشكل المجاور. ففي السؤال 60 مثّل الدوال $f, h, f+h$ في المستوى الإحداثي نفسه، وهكذا في الأسئلة 63-61:

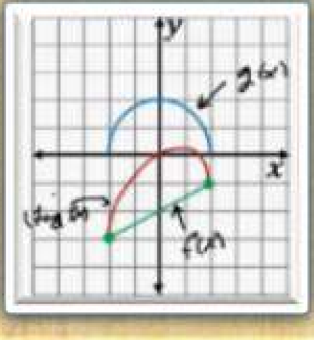
60 $(f+h)(x)$



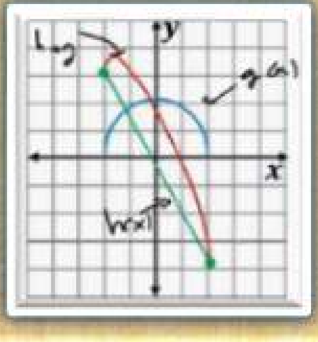
61 $(h-f)(x)$



62 $(f+g)(x)$

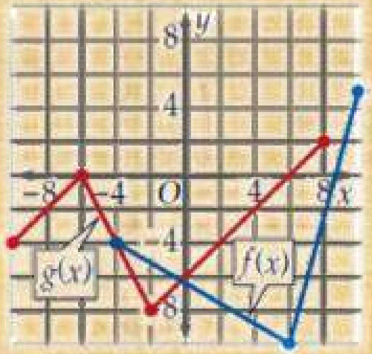


63 $(h+g)(x)$



الحل

حدد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، باستعمال الشكل الآتي:



64 $(f \circ g)(x)$

$\{ x \mid -10 \le x \le -4$ أو $2 \le x \le 8 \ , x \in R \}$

65 $(g \circ f)(x)$

$\{ x \mid -4 \le x \le 10 \ , x \in R \}$

العلاقات والدوال العكسية

١ ـ ٧

تدرب وحل المسائل

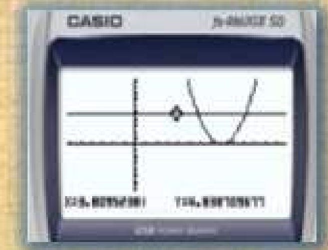
الحل

مثِّل كلًا من الدوال الآتية بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال ١)

1 $y = x^2 + 6x + 9$

لا يوجد دالة عكسية

2 $y = x^2 - 16x + 64$



لا يوجد دالة عكسية

عودة لفهرس الفصل (١)

الحل

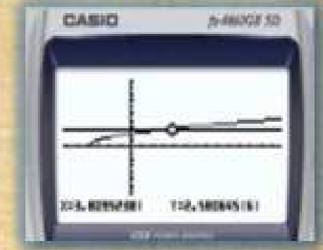
3 $y = 3x - 8$

يوجد دالة عكسية

4 $y = 4$

لا يوجد دالة عكسية

5 $y = \sqrt{x + 4}$



يوجد دالة عكسية

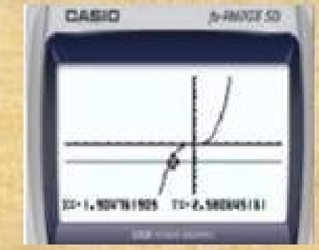
6 $y = -4x^2 + 8$

لا يوجد دالة عكسية

7 $y = \frac{8}{x + 2}$

يوجد دالة عكسية

8 $y = \frac{1}{4}x^3$



يوجد دالة عكسية

الحل

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍ مما يأتي إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9) $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$

غير موجودة

10) $f(x) = 4x^5 - 8x^4$

غير موجودة

11) $f(x) = \sqrt{x + 8}$

$f^{-1}(x) = x^2 - 8 \; , \; x \geq 0$

12) $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$

غير موجودة

13) $f(x) = |x - 6|$

غير موجودة

14) $g(x) = \frac{x - 6}{x}$

$g^{-1}(x) = \frac{6}{1-x} \; , \; x \neq 1$

15) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{8 - x}}$

$f^{-1}(x) = 8 - \frac{36}{x^2} \; , \; x > 0$

16) $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x + 3}}$

$g^{-1}(x) = -3 + \frac{49}{x^2} \; , \; x > 0$

17) $h(x) = \frac{x + 4}{3x - 5}$

$h^{-1}(x) = \frac{5x+4}{3x-1} \; , \; x \neq \frac{1}{3}$

18) $g(x) = |x + 1| + |x - 4|$

غير موجودة

الحل

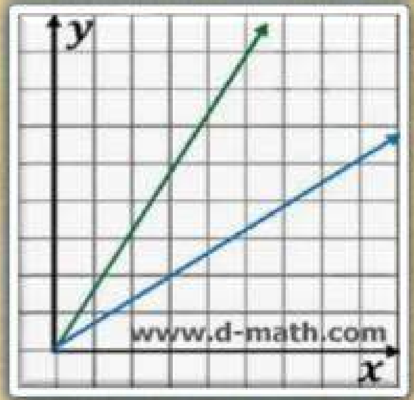
19

سرعة: تعطى سرعة جسم y بالكيلومتر لكل ساعة بالدالة $y = 1.6x$ حيث x سرعة الجسم بالميل لكل ساعة. (مثال 2)

a) أوجد الدالة العكسية لـ y، وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

$y = \frac{x}{1.6}$. y السرعة بالميل لكل ساعة، x السرعة بالكيلو متر لكل ساعة.

b) مثّل كلًّا من الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه.



الحل

أثبت جبريًا أن كلًا من الدالتين f و g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي: (مثال 3)

20

$$f(x) = 4x + 9$$

$$g(x) = \frac{x-9}{4}$$

$$f(g(x)) = \frac{4(x-9)}{4} + 9 = x - 9 + 9 = x$$

$$g(f(x)) = \frac{4x+9-9}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

21

$$f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{5-x}{3}}$$

$$f(g(x)) = -3\left(\sqrt{\frac{5-x}{3}}\right)^2 + 5 = \frac{-3(5-x)}{3} + 5 = x$$

$$g(f(x)) = \sqrt{\frac{5-(-3x^2+5)}{3}} = \sqrt{\frac{3x^2}{3}} = \sqrt{x^2} = x$$

22

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$$

$$g(x) = \sqrt{4x - 32}$$

$$f(g(x)) = \frac{\sqrt{(4x-32)}^2}{4} + 8 = \frac{4x-32}{4} + 8 = x - 8 + 8 = x$$

$$g(f(x)) = \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4} + 8\right) - 32} = \sqrt{x^2 + 32 - 32} = \sqrt{x^2} = x$$

23

$$f(x) = (x+8)^{\frac{3}{2}}$$

$$g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$$

$$f(g(x)) = \left(x^{\frac{2}{3}} - 8 + 8\right)^{\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x$$

$$g(f(x)) = \left[(x+8)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} - 8 = x + 8 - 8 = x$$

الحل

24

$$f(x) = 2x^3 - 6$$

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$$

$$f(g(x)) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}\right)^3 - 6 = \frac{2(x+6)}{2} - 6 = x + 6 - 6 = x$$

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{2x^3-6+6}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

25

$$f(x) = \frac{x-6}{x+2}$$

$$g(x) = \frac{2x+6}{1-x}$$

$$f(g(x)) = \frac{\frac{2x+6}{1-x} - 6}{\frac{2x+6}{1-x} + 2} = \frac{8x}{8} = x$$

$$g(f(x)) = \frac{\frac{2(x-6)}{x+2} + 6}{1 - \frac{x-6}{x+2}} = \frac{8x}{8} = x$$

الحل

26 فيزياء: تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x) = 0.3mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلوجرام و x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية. (مثال 3)

a) أوجد الدالة العكسية لـ $f(x)$، وماذا يعني كل متغير فيها؟

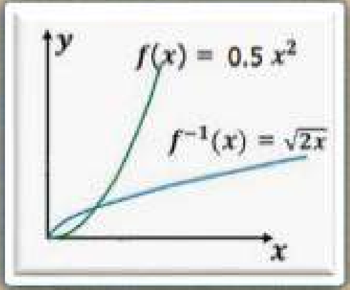
$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2x}{m}}$ هي السرعة بالمتر/ثانية، x هي طاقة الحركة بالجول، m كتلة الجسم بالكيلوجرام.

b) أثبت أن كلًا من الدالتين $f(x)$ والدالة التي حصلت عليها تمثل دالة عكسية للأخرى.

$$f^{-1}[f(x)] = g(\frac{1}{2}mx^2) = (\sqrt{\frac{2(\frac{1}{2}mx^2)}{m}}) = x$$

$$f[f^{-1}(x)] = f(\sqrt{\frac{2x}{m}}) = \frac{1}{2}m(\sqrt{\frac{2x}{m}})^2 = x$$

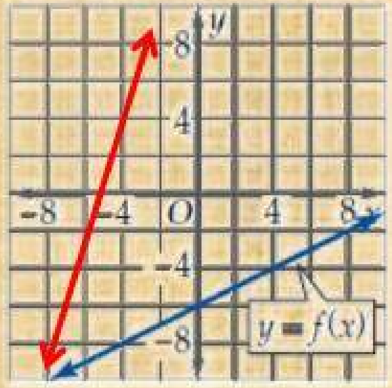
c) مَثِّل كلًا من $f(x), f^{-1}(x)$ على الشاشة نفسها من الحاسبة البيانية عندما تكون كتلة الجسم كيلو جرام واحد.



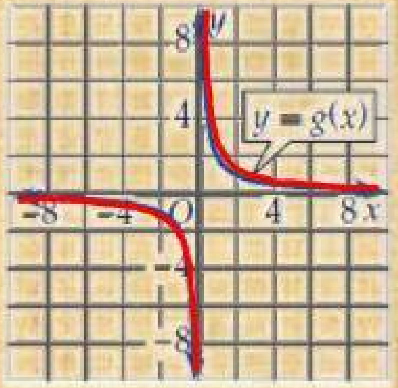
الحل

استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثيل الدالة العكسية لها: (مثال 4)

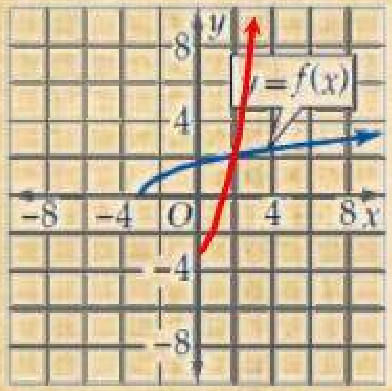
27



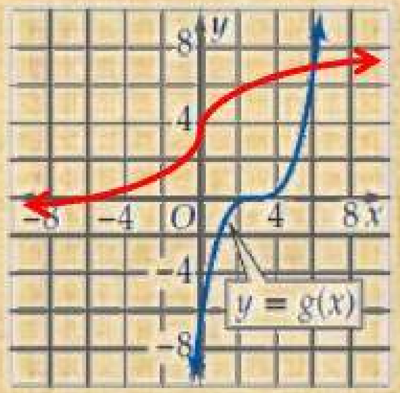
28



29



30



الحل

31

وظائف: يعمل فالح في أحد محلات بيع الأحذية خارج أوقات دوامه الرسمي مقابل راتب مقداره 420 ريالا في الأسبوع ويتقاضى أيضا عمولة مقدارها 5% من قيمة المبيعات، أي أن ما يتقاضاه أسبوعيًا يُعطى بالدالة $f(x) = 420 + 0.05x$. (مثال 5)

a) أثبت أن الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

تحقق الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي،

$$f^{-1}(x)=20(x-420)$$

b) ماذا تمثّل كل من x , $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

تمثل x عمولة فالح خلال أسبوع، أما $f^{-1}(x)$ فتمثل مقدار مبيعات فالح.

c) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x)$, $f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

$x \geq 0$ ، لأنه لا يمكن أن تكون مبيعات فالح بالسالب.

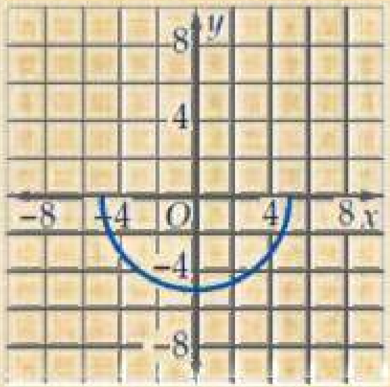
d) أوجد قيمة مبيعات فالح في الأسبوع الذي يتقاضى فيه 720 ريالًا.

6000ريال

الحل

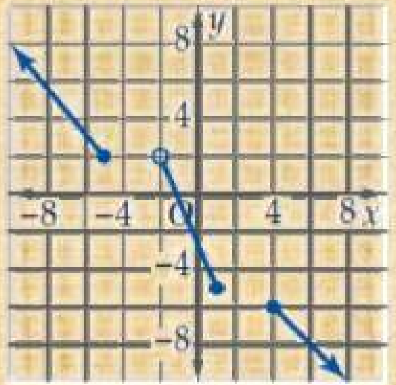
حدد إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

32



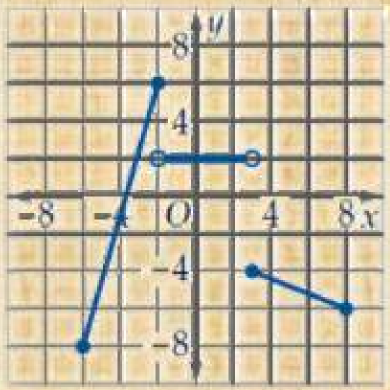
غير موجودة

33



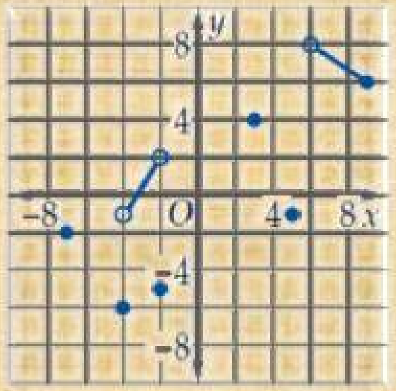
موجوده

34



غير موجودة

35



موجوده

الحل

كون جدولاً للدالة f^{-1} في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، وإذا لم تكن موجودة، فاذكر السبب.

36

x	−6	−4	−1	3	6	10
$f(x)$	−4	0	3	5	9	13

f^{-1} موجود.

x	− 4	0	3	5	9	13
$f^{-1}(x)$	− 6	− 4	− 1	3	6	10

37

x	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

f^{-1} غير موجود.

الحل

38 درجات حرارة: تُستعمل الدالة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجات الحرارة السيليزية إلى درجات الحرارة الفهرنهايتية، وتُستعمل الدالة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$ للتحويل من درجات الحرارة الفهرنهايتية إلى درجات الحرارة المطلقة (كلفن).

a) أوجد f^{-1}، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$، تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات الحرارة فهرنهايتية إلى درجات سيليزية.

b) أثبت أن كلاً من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، ومثّل منحناهما على الشاشة نفسها في الحاسبة البيانية.

$$f^{-1}[f(x)] = \frac{5}{9}\left(\left(\frac{9}{5}x + 32\right) - 32\right) = \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x\right) = x$$

$$f[f^{-1}(x)] = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right) + 32 = x - 32 + 32 = x$$

c) أوجد $(k \circ f)(x)$، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

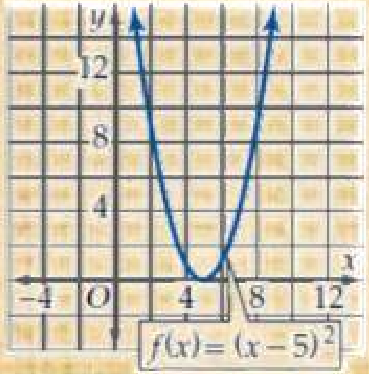
$k[f(x)] = x + 273.13$: تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات سيليزية إلى درجات مطلقة (كلفن).

d) إذا كانت درجة الحرارة 60°C فأوجد درجة الحرارة المطلقة المقابلة لها. 333.15 درجة مطلقة

الحل

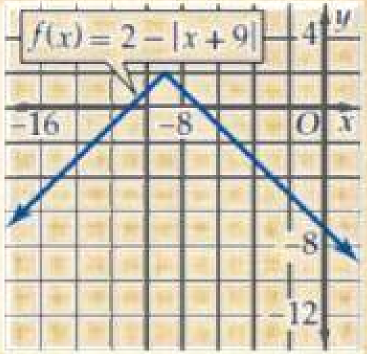
ضع قيودا على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة، ثم أوجد الدالة العكسية لها:

39



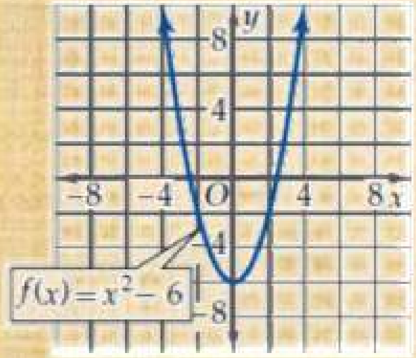
$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 5$ ، $x \geq 5$

40



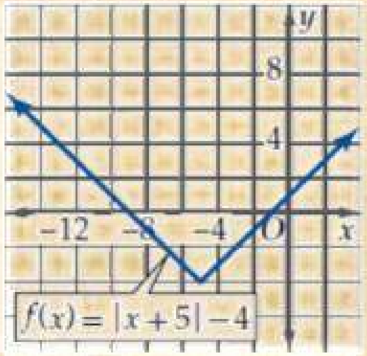
$f^{-1}(x) = x - 11$ ، $x \leq -9$

41



$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 6}$ ، $x \geq 0$

42



$f^{-1}(x) = x - 1$ ، $x \geq -5$

الحل

43

أزهار: تحتاج فاطمة إلى 75 زهرة لتزيين قاعة في إحدى المناسبات. فإذا كان بإمكانها شراء قرنفل بسعر 3 ريالات للزهرة الواحدة وشراء جوري بسعر 5 ريال للزهرة الواحدة، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تمثّل التكلفة الكلية لشراء الأزهار.

افترض أن x تمثل عدد أزهار الجوري

$$f(x) = 5x + 3(75 - x)$$

b) أوجد الدالة العكسية لدالة التكلفة. وماذا يمثّل كل متغير فيها ؟

$$f^{-1}(x) = 0.5x - 112.5$$

c) حدّد مجال دالة التكلفة، ومجال الدالة العكسية لها.

مجال $f(x)$: $\{x \mid 0 \le x \le 75 , x \in w\}$

مجال $f^{-1}(x)$: $\{x \mid 225 \le x \le 375 , x \in R\}$

d) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء الأزهار 305 ريالات، فكم زهرة من القرنفل اشترت؟

35

الحل

إذا كانت الدالة f^{-1} موجودة، فاكتب المجال والمدى لكل من: f, f^{-1}:

44 $f(x) = \sqrt{x-6}$

الدالة f، المجال: $\{x \mid x \ge 6, x \in R\}$

المدى: $\{y \mid y \ge 0, y \in R\}$

الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x \ge 0, x \in R\}$

المدى: $\{y \mid y \ge 6, y \in R\}$

45 $f(x) = x^2 + 9$

f^{-1} غير موجودة

46 $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}$

الدالة f، المجال: $\{x \mid x \ne 4, x \in R\}$

المدى: $\{y \mid y \ne 3, y \in R\}$

الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x \ne 3, x \in R\}$

المدى: $\{y \mid y \ne 4, y \in R\}$

47 $f(x) = \dfrac{8x+3}{2x-6}$

الدالة f، المجال: $\{x \mid x \ne 3, x \in R\}$

المدى: $\{y \mid y \ne 4, y \in R\}$

الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x \ne 4, x \in R\}$

المدى: $\{y \mid y \ne 3, y \in R\}$

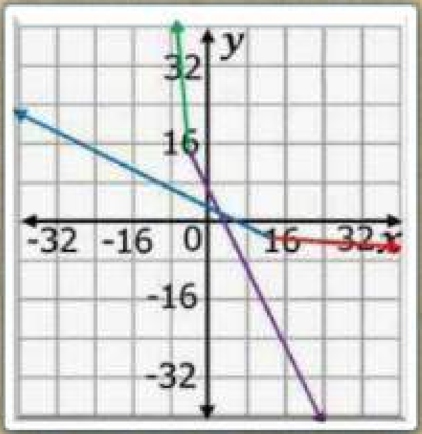
الحل

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f^{-1} ، f في مستوى إحداثي واحد، واذكر أية قيود على المجال:

48 $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ -4 \geq x \\ -2x+5 & , \ -4 < x \end{cases}$

49 $f(x) = \begin{cases} -4x+6 & , \ -5 \geq x \\ 2x-8 & , \ -5 < x \end{cases}$

$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & , \ 16 \leq x \\ 2.5 - 0.5x & , \ 13 > x \end{cases}$



$f^{-1}(x)$ غير موجودة

الحل

50 **اتصالات:** أعلنت شركة لبيع أجهزة الهاتف المحمول عن عرض مبين في الشكل أدناه. إذا كانت الشركة تخصم 50 ريالاً وتمنح تخفيضاً مقداره 10% من سعر الجهاز الأصلي.

a) اكتب دالة r لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم خصم الـ 50 ريالاً فقط.

$$r(x) = x - 50$$

b) اكتب دالة d لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم منح التخفيض (10%) فقط.

$$d(x) = 0.9x$$

c) اكتب قاعدة تمثّل $T = r \circ d$ إذا تم التخفيض ثم الخصم.

$$T(x) = 0.9x - 50$$

d) أوجد T^{-1}، وماذا تمثّل؟

$T^{-1}(x) = \frac{x+50}{0.9}$، تمثل الدالة العكسية السعر الأصلي للجهاز كدالة في سعر الجهاز بعد الخصم وإجراء التخفيض.

e) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء جهاز بعد التخفيض ثم الخصم 760 ريالاً، فكم يكون سعره الأصلي؟

900 ريال

الحل

إذا كانت $f(x) = 8x - 4,\ g(x) = 2x + 6$ فأوجد:

51 $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{x+2}{16}$

52 $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{x-44}{16}$

53 $(f \circ g)^{-1}(x)$

$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-44}{16}$

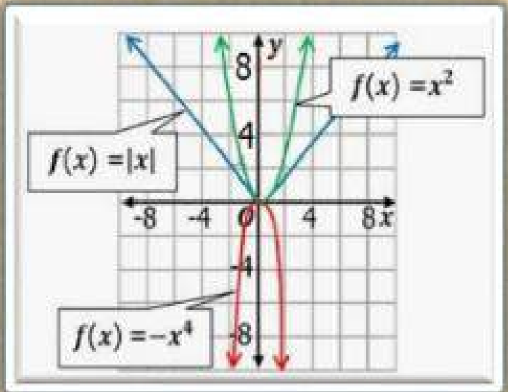
54 $(g \circ f)^{-1}(x)$

$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+2}{16}$

الحل

55 تمثيلات متعددة: سوف تستقصي في هذه المسألة معكوس كل من الدالة الزوجية والدالة الفردية.

a) **بيانيًا:** مثل بيانيًا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟



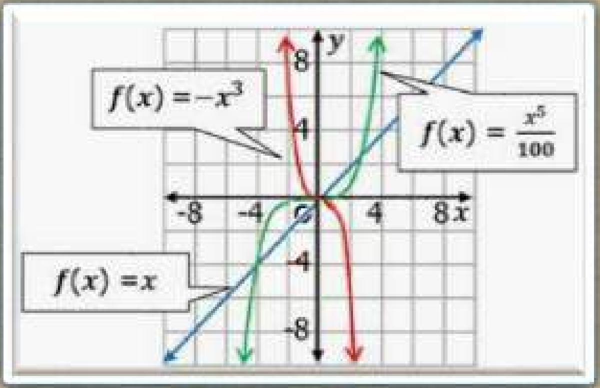
لا تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي.

b) **تحليليًا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود معكوس للدالة الزوجية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفه.

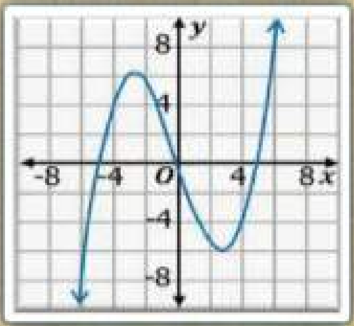
يمكن التوصل إلى قاعدة تقول إن الدوال الزوجية ليس لها دوال عكسية.
إذا كانت الدالة زوجية فإن $f(x) = f(-x)$ وعليه فإن قيمتين من x ترتبطان بقيمة واحدة من y؛ مم يؤدي إلى أن الدالة لا تحقق اختبار الخط الأفقي،
أي أنه لا يوجد للدالة الزوجية دالة عكسية

الحل

c) **بيانيًا :** مثل بيانيًا منحنيات ثلاث دوال فردية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟



d) **تحليليًا :** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود معكوس للدالة الفردية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفِه.



يوضح الرسم أن للدوال الثلاث دوال عكسية، ولكن هذا لا ينطبق على كل الدوال الفردية، فمثلا الدالة

$$f(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{47}{15}x$$

فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$. منحنى هذه الدالة لا يحقق اختبار الخط الأفقي، أي أنه لا يوجد دالة عكسية لـ f